DM1C - Ordre 1 (4 heures)

Éléments de correction

I Chauffage d'une pièce

1. Par analyse dimensionnelle, on arrive à l'unité de la résistance thermique de ces murs en $\boxed{\mathrm{K.s.J^{-1}}}$ ou encore en $\boxed{\mathrm{K.W^{-1}}}$.
2. Par analyse dimensionnelle, on identifie la forme de l'équation différentielle d'ordre 1 : $\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}T = cste}$ donc ici $\tau = RC$ (même expression qu'en électricité même si ça ne représente absolument pas les mêmes grandeurs !)
3. La solution est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière :

$$T(t) = T_H(t) + T_P$$

avec $T_H(t)$ la solution de l'équation homogène sans second membre :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}T = 0$$

cette solution est de la forme :

$$T_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

où $\tau = RC$ est la constante de temps. La solution particulière est quant à elle solution de l'équation de départ et est choisie constante (elle correspond à la valeur de la température en régime permanent). Comme elle est constante, sa dérivée est nulle, d'après l'équation différentielle de départ, il vient :

$$0 + \frac{1}{RC}T_P = \frac{P}{C}$$

soit :

$$T_P = PR$$

il vient alors :

$$T(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + PR$$

On applique alors la condition initiale pour déterminer la constante d'intégration A :

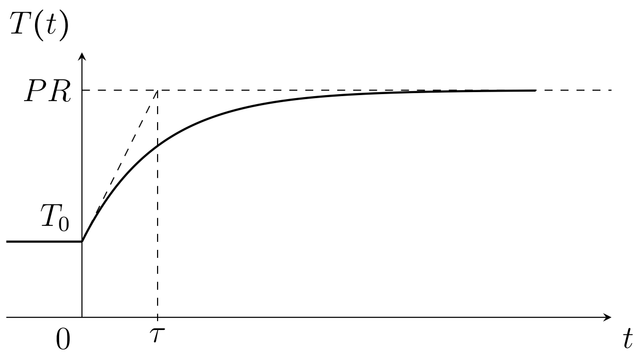
$$T(0) = T_0 = A + PR$$

soit :

$$A = T_0 - PR$$

finalement on a : $\boxed{T(t) = (T_0 - PR)\, e^{-\frac{t}{RC}} + PR}$

4. Voici le graphe en question :



5. Voici le tableau attendu (le pourcentage représente le pourcentage atteint de la valeur finale, celle-ci étant $T_f - T_i$) :

t	0	τ	3τ	5τ	$\to \infty$
T	$T_i = T_0 = 288$ K	$295,6$ K $= 63$ %	$299,4$ K $= 95$ %	$299,9$ K $= 99,9$ %	$T_f = PR = 300$ K
$\dot{T}$	$0,003$	$0,001$	2.10^{-4}	2.10^{-5}	$\to 0$

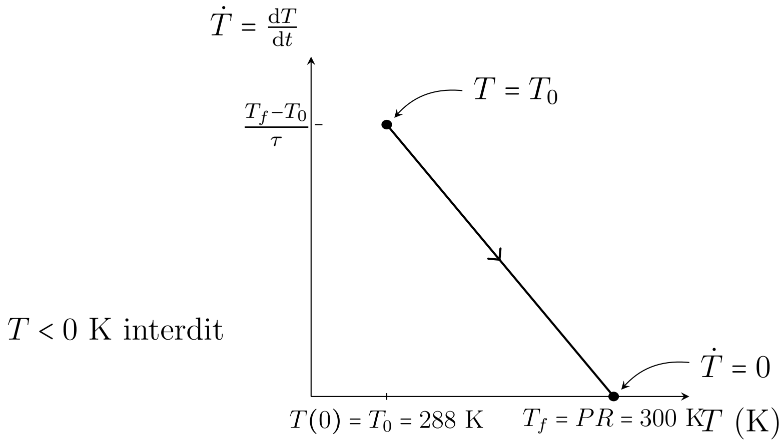
6. Graphe avec tangentes à $t = 0$, $t = \tau$, $t = 3\tau$ et $t = 5\tau$. Les variations sont les plus importantes au départ, la pente de la tangente est la plus importante au départ. Ensuite la pente des tangentes diminue et les variations aussi donc. Le régime permanent est atteint à plus de $99,9$ % au bout de 5τ.

7. En régime permanent, la température est stabilisée et constante, les variations de température sont nulles. À tout instant en régime permanent, $\boxed{\text{la puissance thermique } P = 2 \text{ kW}}$ du radiateur qui chauffe $\boxed{\text{compense les pertes thermiques } P_{th}}$.

8. Pour chauffer plus vite (comprendre atteindre la température du régime permanent plus rapidement), il faut chercher à $\boxed{\text{diminuer } \tau}$, soit diminuer R la résistance thermique des parois, ça peur paraître surprenant de devoir diminuer l'isolation pour chauffer plus vite...mais en jouant sur R on augmente aussi la valeur de le température en régime permanent donc on doit atteindre une valeur plus faible, ce qui diminue le temps qu'il faut pour l'atteindre (la conclusion directe n'est pas possible). Ou alors diminuer C la capacité thermique de la pièce (qui s'interprète en thermodynamique comme l'énergie à fournir pour faire augmenter la température de la pièce de 1 °C, voir plus tard dans l'année...)
On remarque d'ailleurs effectivement que si la résistance thermique R diminue, à puissance de chauffe égale, on atteint une plus faible valeur de température en régime permanent (il fait moins chaud dans la pièce si l'isolation est plus faible).

9. A partir de la forme : $\dot{T} + \frac{1}{\tau}T = \frac{P}{C}$, on peut écrire : $\tau\dot{T} + T = PR = T_f$. On obtient : $\dot{T} = \frac{P}{C} - \frac{1}{RC}T$. Ou encore comme demandé : $\boxed{\dot{T} = \frac{T_f}{\tau} - \frac{T}{\tau}}$

10. Voici le portrait de phase :



Le portrait de phase est défini pour T compris entre $T_0 = 288$ K et $T = T_f = 300$ K. Il se parcourt de gauche à droite, le régime permanent correspondant à $t \to \infty$ est atteint lorsque $\dot{T} = 0$ et $T = T_f$. On remarque que pour $\dot{T} = 0$ on retrouve la température du régime permanent $T = T_f = 300$ K et lorsque $T = T_0$ à l'instant initial $t = 0$, on a une dérivée $\dot{T}$ maximale et égale à $(T_f - T_0)/\tau$.

Bon courage et bon travail ! ☺