

DM2 - Champagne ! (4 heures)

Encadrer les résultats littéraux et les applications numériques (AN).

Conseils généraux

- soignez la présentation : faites de beaux schémas, aérez votre copie, utilisez des couleurs
- soignez votre rédaction : vérifiez votre orthographe et soignez vos raisonnements
- la recherche personnelle est utile, si vous recopiez un travail non personnel, vous perdez votre temps
- un travail incomplet mais personnel est acceptable, un travail complet recopié ne l'est pas
- organisez et planifiez votre travail, je reste disponible par mail ou en fin de cours en cas de question

Le niveau ★ est absolument à faire en vue des chapitres de mécanique à venir.

Le niveau ** permet d'approfondir mais est moins fondamental.

I Remontée des bulles dans le champagne ★

On étudie la trajectoire des bulles une fois en liberté au sein du liquide (le champagne !) de masse volumique $\rho_c \approx 1,00 \text{ g.cm}^{-3}$. On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace (O, \vec{e}_z) vertical orienté vers le haut, où \vec{e}_z est un vecteur unitaire (i.e. de norme 1).



Lors de la montée, la bulle de rayon $r = 1,00 \text{ mm}$ et de masse constante est soumise, outre son poids, à :

- la poussée d'Archimède, $\vec{\Pi}$, égale à l'opposé du poids d'un volume d'eau équivalent au volume de la bulle ;
- une force de frottement fluide de type visqueux modélisée par la loi de Stokes, modélisant la résistance de l'eau, d'expression :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où $\eta = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$ est la viscosité du champagne, r le rayon de la bulle et \vec{v} sa vitesse.

1. Montrer que le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède. On supposera que la pression de CO_2 dans la bulle vaut $P_{\text{CO}_2} = 1,00 \text{ bar}$.
2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = \frac{\vec{v}_{lim}}{\tau}$$

où l'on identifiera τ et \vec{v}_{lim} en fonction de ρ_c , ρ_{CO_2} la masse volumique du CO_2 , η , r et g .

3. Résoudre cette équation différentielle en prenant $\vec{v}(0) = 0 \text{ m.s}^{-1} \vec{e}_z$.
4. Tracer alors, l'allure de la courbe $v(t)$ en précisant les valeurs caractéristiques.
5. Application numérique pour v_{lim} et τ . Commenter.

II Taille des bulles dans le champagne ★★

On cherche à déterminer l'évolution de la pression en fonction de la profondeur dans un liquide. On repère la surface de l'eau par son altitude $z = 0$, l'axe vertical (O, \vec{e}_z) est orienté vers le bas, \vec{e}_z étant un vecteur unitaire. En supposant le champ de pesanteur uniforme, la pression dans un fluide de masse volumique ρ vérifie la relation de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = \rho g$$

6. En sachant que l'eau est un fluide homogène et incompressible dans les conditions usuelles d'utilisation, que peut-on en déduire pour sa masse volumique ?
7. Etablir l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de la profondeur z . On pourra introduire une pression P_0 dont on précisera la signification et la valeur.
8. Evaluer la pression dans une bulle formée au fond d'une flute de champagne. On attend une prise d'initiative. Que peut-on en déduire quant à l'évolution de la taille de la bulle lors de sa remontée ?

Pour affiner le modèle, on indique que dans une bulle de rayon R , la différence entre la pression intérieure P_{int} et la pression extérieure P_{ext} est donnée par la loi de Laplace :

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{2\gamma}{R}$$

où $\gamma = 50 \text{ mN.m}^{-1}$ est la tension superficielle de l'interface eau/air.

9. Evaluer la pression dans une bulle venant d'être libérée.
10. En appliquant la relation de la statique des fluides et en considérant le CO_2 à l'intérieur de la bulle comme un gaz parfait, établir une relation entre la profondeur z et le rayon R de la bulle sous la forme :

$$P_0 + \rho g z = \frac{A}{R^3} - \frac{B}{R}$$

en identifiant A et B en fonction des paramètres du problème.

11. Que peut-on en déduire quant à l'évolution de la taille de la bulle lors de sa remontée ? Ce modèle plus fin, est-il en accord avec le précédent modèle ?

Bon courage et bon travail ! ☺

L'abus d'alcool est dangereux pour le passage en PT*, à consommer avec modération