DM3C - Tartine (4 heures)

Éléments de correction

N'hésitez pas à largement commenter la copie, du moment que ces remarques sont pertinentes. On sanctionne lourdement tout raccourci de calcul, ou tout essai de magouilles quelconque dans les calculs (0 point à la question). Les raisonnements doivent être soignés, clairs, rigoureux. Un manque de propreté et de soin dans la présentation générale de la copie est sanctionné par le retrait d'un point sur la note finale.

Copie de	**Correcteur**
Remarque	
Note brute (24 pts)	**Note / 20 (soin -1)**

La loi de Murphy

1. Le bilan des forces donne $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ et la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$. L'application du théorème du moment cinétique (TMC) par rapport à l'axe $(O_\Delta) = \Delta$ donne :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = M_\Delta(\overrightarrow{P}) + M_\Delta(\overrightarrow{R_N})$$

Il vient (le moment d'inertie par rapport à Δ est celui par rapport à (O_y) :

$$\frac{\mathrm{d}J_{Oy}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}).\overrightarrow{e_\Delta} + (\overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{R_N}).\overrightarrow{e_\Delta}$$

Soit alors après simplification :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3g\delta}{a^2 + 4\delta^2}\cos\theta$$

On remarque que le moment du poids est bien positif il fait tourner dans le sens positif défini par l'axe Δ. Sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} - \frac{3g\delta}{a^2 + 4\delta^2}\cos\theta = 0$$

1 pt pour écrire le TMC, 1 pt pour les calculs menés à bien, 1 pt pour le résultat final. 0 pt pour toute réponse de truand.

Total : $\boxed{\quad / 3 \text{ pts}}$

2.

On repart de :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g\delta}{a^2 + 4\delta^2} \cos\theta$$

Que l'on multiplie par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{3g\delta}{a^2 + 4\delta^2} \dot{\theta} \cos\theta$$

On reconnaît des dérivées usuelles :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{3g\delta}{a^2 + 4\delta^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\theta)$$

On intègre entre $\theta_0 = 0$ et θ pour une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0 = 0$ et $\dot{\theta}$:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - 0 = \frac{3g\delta}{a^2 + 4\delta^2}(\sin\theta - \sin(0))$$

Soit finalement :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{6g\delta}{a^2 + 4\delta^2} \sin\theta}$$

1 pt pour la multiplication par $\dot{\theta}$, 1 pt pour l'identification des dérivées, 1 pt pour les bonnes bornes d'intégration, 1 pt pour le résultat correct. 0 pt pour toute réponse de truand.

Total : / 4 pts

3.

Application numérique en $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\dot{\theta}(\pi/4) = \sqrt{\frac{6 \times 9,81 \times 0,01 \times 5.10^{-2}}{(5.10^{-2})^2 + 4(0,1 \times 5.10^{-2})^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Ce qui amène à :

$$\dot{\theta}(\pi/4) \approx 2,83 \text{ rad.s}^{-1}$$

Une fois en chute libre, seul le poids qui s'exerce au centre d'inertie s'applique, son moment est nul, il ne peut modifier la vitesse angulaire de rotation. Ainsi la vitesse angulaire se conserve lors de la chute (ou dit autrement le moment cinétique se conserve).

1 pt pour avoir vu qu'il faut prendre $\theta = pi/4$, 1 pt pour l'application numérique, 1 pt pour la conservation de la vitesse angulaire, 1 pt pour une justification propre. 0 pt pour toute réponse de truand.

Total : / 4 pts

4.

Comme la vitesse angulaire est constante, notons la $\dot{\theta} = \omega$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$$

Soit par intégration :

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

Attention avec $\theta_0 = \pi/4$, soit :

$$\theta(t) = \omega t + \pi/4$$

1 pt. 0 pt pour toute réponse de truand.

Total : / 1 pt

5.

La tartine est en chute libre. Le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué sur le centre d'inertie G donne en projection sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$m\ddot{z} = mg$$

Nous obtenons l'équation horaire après double intégration en supposant la vitesse initiale quasi nulle :

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

On pose alors la durée de chute τ telle que $z(\tau) = h$, il vient :

$$z(\tau) = h = \frac{1}{2}g\tau^2$$

Qui permet d'isoler :

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

1 pt pour le PFD, 1 pt pour l'équation horaire, 1 pt pour l'expression finale. 0 pt pour toute réponse de truand.

Total : / 3 pts

6.

A partir de l'équation horaire de θ, on calcule l'angle final $\theta(\tau)$:

$$\theta(\tau) = \omega\tau + \pi/4$$

Soit :

$$\theta(\tau) = \omega\sqrt{\frac{2h}{g}} + \pi/4$$

L'application numérique donne :

$$\theta(\tau) \approx 1,89 \text{ rad} \approx 108\ °$$

Même si la tartine a tourné de moins de 180 °, elle a tourné de plus de 90 ° elle se retrouve déjà dans une configuration qui va la faire retomber au sol du mauvais côté. Avec un schéma c'est plus clair.

1 pt pour avoir vu qu'il faut calculer θ à la date τ, 1 pt pour l'expression, 1 pt pour l'application numérique, 1 pt pour le schéma et la conclusion qui montrent que la tartine a fait une rotation suffisante pour finir sur le côté beurré. 0 pt pour toute réponse de truand.

Total : / 4 pts

7.

Entre la Terre et la Lune, seule la gravité g change. La gravité joue sur la durée de chute τ comme sur la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ qui seront plus faibles sur la Lune que sur la Terre. Cependant, $\theta(\tau)$ est indépendant du champ de pesanteur, donc le résultat est le même : la tartine tombe là aussi du côté beurré.

1 pt pour l'influence sur τ, 1 pt pour l'influence sur $\dot{\theta}$, 1 pt pour la conclusion correcte.

Total : / 3 pts

8. On cherche h tel que $\theta(\tau) > 3\pi/2$ (pour les mêmes raisons géométriques, si on dépasse le dernier quart on tombera du bon côté). Il vient :

$$h = \frac{g}{2}\left(\frac{5\pi}{4\omega}\right)^2$$

L'application numérique amène à $h \approx 9,44$ m...

1 pt pour définir la nouvelle valeur de $\theta(\tau)$ (on accepte 2π), 1 pt pour la conclusion.

Total : / 2 pts

Bon courage et bon travail ! ☺