

DM3py - Intégrales



Faire au moins le niveau *****.

Le niveau ****** est important et permet d'approfondir.

I La méthode des rectangles sur la période d'un pendule *****

On s'intéresse au pendule simple. Le système étudié est une masse m assimilée à un point matériel attachée à un fil inextensible de longueur ℓ dont on repère la position par l'angle θ avec la verticale.

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude (approximations des petits angles), la période T des oscillations est donnée en première approximation par :

$$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Dans le cas général, la période des oscillations est :

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

avec $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ et où θ_0 est l'amplitude des oscillations.

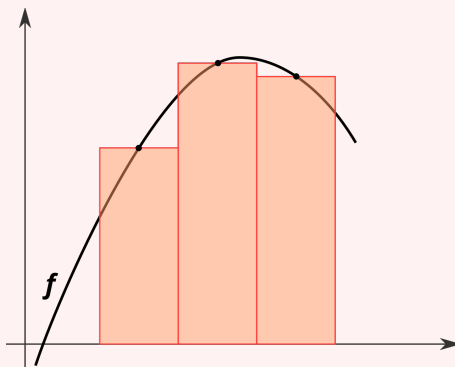
1. Définir les variables globales et écrire une fonction `approx(x)` qui prends comme argument un flottant `x` et retourne :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

2. Que fait la fonction `quad` ? Que vaut la période pour $\ell = 1$ m et $\theta_0 = 50^\circ$?

Algorithme : méthode des rectangles

On considère la méthode des rectangles avec point milieu. Cette approximation est construite à partir d'une subdivision régulière $a_0, \dots, a_n$ de l'intervalle $[a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors approchée par la somme des aires des rectangles dont la largeur est la longueur de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ et la hauteur est la valeur de f au milieu de cet intervalle.



3. Écrire une fonction `rectangles(f,a,b,n)` qui implémente la méthode des rectangles pour calculer l'intégrale de `f` entre `a` et `b` où `n` est le nombre d'intervalles.
4. Utiliser cette méthode pour calculer T pour $\ell = 1$ m et $\theta_0 = 50^\circ$.
5. Commenter l'évolution du résultat numérique en fonction de n .

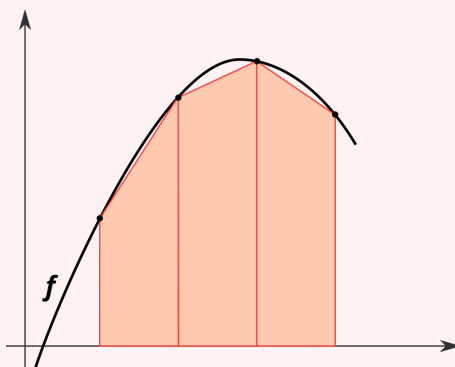
II La méthode des trapèzes sur le travail d'une isotherme**

Le travail des forces de pression extérieures lors d'une transformation réversible est : $W = - \int P(V) dV$. On peut montrer que dans un diagramme représentant l'évolution de la pression P en fonction du volume V , cela correspond à l'opposé de l'aire sous la courbe $P(V)$ dans l'intervalle $[V_i, V_f]$. Une détente isotherme de n moles d'un gaz parfait à la température T suit une loi de pression (avec nRT constant) :

$$P(V) = nRT \times \frac{1}{V}$$

Algorithme : méthode des trapèzes

On considère la méthode des rectangles avec point milieu. Cette approximation est construite à partir d'une subdivision régulière $a_0, \dots, a_n$ de l'intervalle $[a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est alors approchée par la somme des aires des rectangles dont la largeur est la longueur de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ et la hauteur est la valeur de f au milieu de cet intervalle.



- Définir les variables globales et écrire une fonction $P(V)$ qui prends comme argument un flottant x et retourne :

$$P(V) = nRT \times \frac{1}{V}$$

- Écrire une fonction `trapezes(f,a,b,n)` qui implémente la méthode des trapèzes pour calculer l'intégrale de f entre a et b où n est le nombre d'intervalles.
- Utiliser cette méthode pour calculer le travail W reçu par $n = 1$ mol d'un gaz parfait lors d'une détente à $T = 298$ K pour une transformation isotherme réversible évoluant de $V_i = 1$ L à $V_f = 2$ L. Rappel : l'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h est $(B + b) \times h/2$. Commenter.
- Faire une recherche sur la méthode de Simpson. Commenter.

Bon courage et bon travail ! ☺