DS3C - Électricité (2 heures)

Éléments de correction

I Cours

1. Voir cours et TEST.
2. Voir cours et TEST.
3. Voir cours et TEST.
4. Voir cours et TEST.
5. Voir cours et TEST.

II RLC parallèle

6. Comme l'intensité traversant une bobine est une fonction continue du temps et que la bobine n'est parcourue par aucun courant pour $t < 0$:

$$\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0}$$

Comme la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps et que le condensateur est déchargé pour $t < 0$:

$$\boxed{u(0^+) = \frac{q(0^+)}{C} = \frac{q(0^-)}{C} = 0}$$

il vient :

$$\boxed{i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0}$$

et :

$$\boxed{i_C(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{r}}$$

Lorsque le régime permanent est établi, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine se comporte comme un simple fil, il vient :

$$\boxed{i_C(\infty) = 0}$$

et :

$$\boxed{u(\infty) = 0}$$

ce qui entraine :

$$\boxed{i_R(\infty) = 0}$$

et :

$$\boxed{i(\infty) = \frac{E}{r}}$$

on en déduit finalement :

$$\boxed{i_L(\infty) = i(\infty) = 0}$$

7. On a :

$$i = i_L + i_C + i_R$$

donc :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(E-u)}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$$

finalement avec $u = Ri_R$ on obtient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2i_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_R = 0}$$

8. Par identification de cette forme canonique, on a :

$$\boxed{\text{A=1}} \qquad \boxed{B = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)} \qquad \boxed{C = \frac{1}{LC}} \qquad \boxed{D = 0}$$

III Adaptation d'impédance

9. Voici le schéma du circuit.

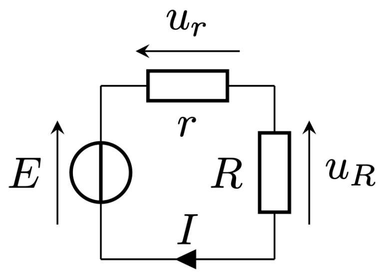

Figure 1 – Circuit

On a : $E = u_r + u_R = rI + RI$, d'où $I = \frac{E}{R+r}$. On a $P_R = u_R I = RI^2$, donc $\boxed{P_R = \frac{RE^2}{(R+r)^2}}$

10. De même $P_r = \frac{rE^2}{(R+r)^2}$ donc $P_{tot} = P_R + P_r = \frac{(R+r)E^2}{(R+r)^2}$ soit $\boxed{P_{tot} = \frac{E^2}{R+r}}$

11. Comme P_R est toujours positive, vaut 0 si $R = 0$ et tend aussi vers 0 lorsque R est très grand, alors elle admet un maximum pour $R > 0$. Sa recherche passe par le calcul de la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}P_R}{\mathrm{d}R} = \frac{1 \times (R+r)^2 - (2R+2r)R}{(R+r)^4} = \frac{-R^2+r^2}{(R+r)^4}$$

la dérivée est nulle pour $\boxed{R = R^\star = r}$

12. Le rendement est donc :

$$\rho = \frac{P_R}{P_{tot}} = \frac{\frac{RE^2}{(R+r)^2}}{\frac{E^2}{R+r}}$$

soit $\boxed{\rho = \frac{R}{R+r}}$. Pour $R = R^\star = r$, le rendement ne vaut que $\boxed{50\ \%}$. La puissance fournie à la résistance R est maximale mais beaucoup de puissance est perdue dans la résistance interne du générateur lui-même.

13. Voir TD.

14. La tension U est donnée par $U = RI_2$. Un pont diviseur de courant permet d'obtenir I_2 en fonction du courant I dans la branche principale, ainsi $I_2 = \frac{R}{R+R}I = \frac{I}{2}$. On peut déterminer I par le calcul d'une grosse résistance équivalente $R_{eq} = \frac{R^2}{R+R} + \frac{R^2}{R+R} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$. Le schéma équivalent ne comporte alors que le générateur de tension E et la résistance R_{eq} parcourue par le courant I. On peut écrire $I = \frac{E}{R_{eq}}$. Il vient finalement : $U = R\frac{I}{2} = \frac{RE}{2R_{eq}} = \frac{RE}{2R}$ soit finalement $\boxed{U = E/2}$

15. La puissance P dissipée par la résistance tout à droite est donnée par $P = UI_2$, soit alors $P = \frac{E}{2}\frac{I}{2} = \frac{E}{2}\frac{E}{2R}$ soit finalement $\boxed{P = E^2/4R}$

IV Système $R'LRC$

16. Avant que l'interrupteur se referme, toutes les intensités sont nulles :

$$I(0^-) = i(0^-) = i'(0^-) = 0$$

Par continuité de l'intensité du courant dans une bobine, on en déduit :

$$\boxed{i'(0^+) = i'(0^-) = 0}$$

Dans la branche contenant le condensateur, c'est la tension u_C et la charge q qui est continue, la loi des mailles donne :

$$E = Ri(0^+) + \frac{q(0^+)}{C}$$

Et comme $q(0^+) = q(0^-) = 0$, il vient :

$$\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$$

Après un temps suffisamment long ($t \to \infty$), le régime permanent est établi. La source imposant une tension constante, le régime permanent correspond à un régime continu. Or, dans un tel régime, la bobine peut être remplacée par un fil ($u_L = 0$) et le condensateur par un interrupteur ouvert ($i = 0$). La loi des mailles donne alors :

$$\boxed{i(\infty) = 0} \qquad \boxed{i'(\infty) = \frac{E}{R'}}$$

17. Par loi des mailles, on a :

$$-E + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

Et : $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ donc en dérivant :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}i = 0}$$

18. Par loi des mailles, on a :

$$-E + R'i' + L\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t} + \frac{R'}{L}i' = \frac{E}{L}}$$

19. On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec $\tau = RC$, dont la solution particulière est nulle et dont la solution homogène s'écrit : $i(t) = Ae^{-t/RC}$. Avec la condition initiale $i(0^+) = E/R$, il vient :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/RC}}$$

20. On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec $\tau = L/R'$, dont la solution particulière est nulle et dont la solution homogène s'écrit : $i(t) = Ae^{-R't/L}$. Avec la condition initiale $i(0^+) = 0$, il vient :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R'}\left(1 - e^{-R't/L}\right)}$$

21. Par loi des noeuds, $I = i + i'$, donc :

$$\boxed{I(t) = i(t) + i'(t) = \frac{E}{R}e^{-t/RC} + \frac{E}{R'}\left(1 - e^{-R't/L}\right)}$$

22. On désire avoir $I = \text{Cste}$ ce qui impose :

$$\frac{E}{R}e^{-t/RC} - \frac{E}{R'}e^{-R't/L} = \text{Cste}$$

Ceci n'est possible que si : $\boxed{R = R'}$ et $\boxed{RC = L/R'}$. Dans ce cas, on a alors $\boxed{I = E/R}$.

V Capteur de température et pont de Wheaston ⋆

23. Lorsque le pont est équilibré, le courant circulant à travers l'ampèremètre est nul, or il est modélisable comme une résistance r, ainsi la tension à ses bornes obéit à la loi d'Ohm. Lorsque le pont est équilibre $\boxed{\text{la tension à ses bornes est alors nulle.}}$

24. Comme la tension, différence de potentiel aux bornes de l'ampèremètre est nulle, alors $\boxed{V_A = V_B.}$

25. Comme on considère que le potentiel en bas du circuit est la masse est donc égal à 0 V et que $V_A = V_B$, alors $\boxed{U_2 = U_4}$ lorsque le pont est équilibré.

26. On peut alors utiliser un pont diviseur de tension (car le courant dans l'ampèremètre est nul et que le courant traversant R_1 et R_2 est le même et celui qui traverse R_3 est le même que celui qui traverse R_4. On a alors :

$$U_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$$

$$U_{R4} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}E$$

en égalisant on arrive bien à :

$$\boxed{R_1 R_4 = R_2 R_3}$$

27. On se place pour un pont équilibré. On a alors $\Delta T = 0$ (et donc $R_1 = R_0$) et $R_1R_4 = R_2R_3$, d'où $R_0R_4 = R_2R_3$. Comme $x = R_4/R_3$ alors finalement :

$$\boxed{R_0 = \frac{R_2}{x}}$$

Bon courage et bon travail ! ☺