DS5 - Mécanique (2 heures)

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront dans une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. Les candidats soigneront leur copie en conséquence. En particulier, les expressions littérales et les résultats des applications numériques seront encadrés. On changera de page pour un nouveau problème et on respectera les notations de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sujet à rendre, calculatrice interdite.

Nom :

I Cours

1. Établir l'expression de la vitesse d'impact lors d'une chute libre de hauteur h.
2. Établir l'équation du mouvement (équation différentielle) vérifiée par l'angle θ pour un pendule simple par 2 méthodes.
3. Établir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dans le cas du ressort horizontal de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k accroché à une masse m.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position Z d'une masse pour un système masse-ressort vertical soumis également à une force de frottement fluide de type $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. On précise que $Z = z - \ell_{eq}$ représente la position par rapport à la position d'équilibre.
5. Pour le système masse-ressort vertical suspendu au plafond, établir l'expression de la position d'équilibre ℓ_{eq} en fonction de ℓ_0, m, g et k.

II Felix Baumgartner - Redbull 2012

L'autrichien Félix Baumgartner est devenu le premier Homme à franchir le mur du son en chute libre après s'être élancé d'une capsule attachée à un ballon géant à 39000 *m d'altitude, dans le ciel du Nouveau-Mexique. Baumgartner, 43 ans, a officiellement atteint* 1,24 *fois la vitesse du son lors de sa chute, soit* 1341,9 *km/h, selon Brian Utley, qui a procédé à l'enregistrement du record. Il s'est trouvé en chute libre pendant* 4 *min* 20 *s avant l'ouverture de son parachute. Le saut dans son ensemble a duré un peu plus de* 9 *min [. . .] Arrivé à l'altitude programmée, après une longue check-list, il s'est élancé dans le vide et a atteint sa vitesse maximale assez rapidement, après quelques dizaines de secondes. Il a atterri sain et sauf, avant d'être rejoint par les membres de sa mission et de sa famille. (Le Monde, 14.10.2012)*

Données pour l'ensemble de l'exercice

— constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ m^3.kg.$^{-1}$.s^{-2}.
— masse de la Terre $M_T = 5,9710^{24}$ kg
— masse de Baumgartner avec sa combinaison $m = 110$ kg
— rayon de la Terre $R_T = 6371$ km
— température T(K)= θ(°C)+273
— vitesse du son en fonction de la température T en K : $v = \sqrt{402 \times T}$
— masse volumique moyenne de l'air $\rho = 1,3$ g.L^{-1}

II.1 Chute libre

6. Représenter sur un schéma :
   — la Terre et Baumgartner supposé ponctuel,
   — un vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté de Baumgartner vers la Terre,
   — la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur Baumgartner.
7. Donner l'expression vectorielle de cette force en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}$ et des autres grandeurs utiles.

8. Cette force correspond au poids sur Terre. En déduire l'expression de la constante de pesanteur g en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, R_T et l'altitude z.

9. En supposant que la seule force est la force d'attraction gravitationnelle supposée non constante, établir l'équation du mouvement, sous la forme d'une équation différentielle vérifiée par $r = R_T + z$.

10. Le mouvement est étudiée dans un référentiel terrestre supposé galiléen sur un axe Oz dirigé vers le bas. L'origine O de l'axe correspond à la position de départ de Baumgartner. Il est supposé en chute libre dans cette partie, il ne subit donc que son poids $\vec{P}$ qu'on suppose maintenant constant. Donner l'expression de l'accélération subit par Baumgartner.

11. En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ au cours du temps.

12. Établir l'expression de l'équation horaire $z(t)$.

II.2 Record de vitesse pour la chute réelle

Le graphe 1 en annexe donne l'évolution de la vitesse en chute réelle en fonction du temps. Le graphe 2 donne l'évolution de l'altitude de Baumgartner en fonction du temps, enregistrée à l'aide de quatre balises GPS placées dans sa combinaison.

13. D'après le document d'introduction, quelle est la valeur de sa vitesse record en m.s^{-1} ? À quel instant et à quelle altitude a-t-il atteint cette vitesse ?

14. Le terme « chute libre » dans l'article de journal est-il rigoureux ? Justifier.

15. Quelle est d'après le document d'introduction, la vitesse du son au moment où Baumgartner atteint sa vitesse record ?

16. En déduire la température de l'air à cette altitude. Cette température correspond-elle à celle lue sur le graphe 3 de l'annexe ?

II.3 Chute réelle et énergies

Durant sa chute, l'altitude et la vitesse de Félix Baumgartner sont données par les graphes 1 et 2 de l'annexe.

17. Donner l'expression de l'énergie mécanique de Baumgartner pendant sa chute en choisissant un axe z vertical ascendant.

18. L'énergie mécanique se conserve-t-elle entre les instants $t_1 = 60$ s et $t_2 = 80$ s ? Pourquoi ?

Les frottements subis par Baumgartner peuvent être assimilés à une force notée $\vec{f}$ supposée constante.

19. Exprimer le travail de la force $\vec{f}$ en fonction de sa norme f et de la distance h parcourue entre les instants t_1 et t_2.

20. Exprimer puis calculer la norme f de cette force par un théorème énergétique.

21. Exprimer l'accélération a subie par Baumgartner entre les instants t_1 et t_2 en fonction de m, g et f. Calculer sa valeur.

22. Le signe de a est-il cohérent avec le graphe 1 ? Justifier.

II.4 Analyse de la chute réelle

La chute réelle doit tenir compte des frottements de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec α une constante positive et de la poussée d'Archimède.

23. Montrer que la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

24. Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme v de la vitesse.

25. En déduire l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte en régime permanent.

26. Exprimer alors le coefficient α dans le cas de l'air.

27. Résoudre l'équation différentielle et exprimer la norme $v(t)$ de la vitesse.

28. Tracer l'allure du graphe $v(t)$. Pourquoi le graphe 1 est différent ? Justifier.

III Projet Virgo

Les ondes gravitationnelles ont été étudiées grâce à de grands interféromètres. Comme les mesures sont extrêmement fines et faibles en intensité, il est fondamental d'annuler tout le bruit environnant, notamment toute perturbation extérieure telle qu'une légère vibration sismique. Le principe simplifié repose sur l'utilisation d'un oscillateur.

On considère un pendule simple, formé d'un fil inextensible de masse négligeable de longueur L_p ; l'une de ses extrémités est reliée au point O_1 fixe d'abscisse x_0 l'autre à la masse M supposée ponctuelle dont l'abscisse est notée x_1. On se place dans l'approximation des petits angles.

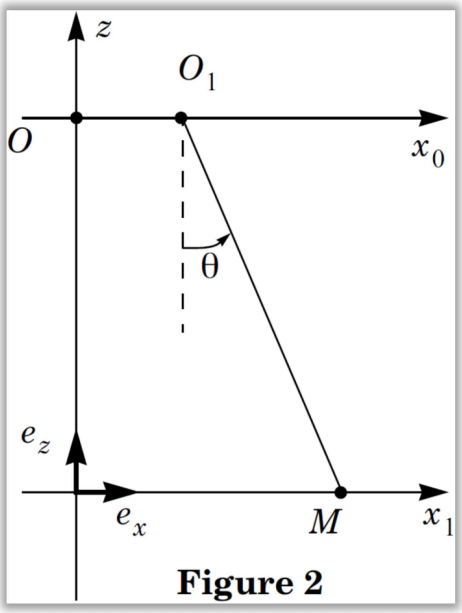

Figure 2

29. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$. On introduira la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/L_p}$. Donner la loi $x_1(t)$ avec ces conditions initiales quelconques.

30. On soumet maintenant la masse M à une force d'amortissement $\vec{f} = -\frac{M}{\tau}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\vec{e_x}$. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$.

31. Identifier et exprimer un facteur de qualité Q.

32. Sur trois schémas différents, tracer l'allure de $x_1(t)$ pour chacun des trois régimes possibles (on prendra les conditions initiales $x_1(t=0) = 0$ et $\dot{x_1}(t=0) = 0$).

Le point O_1 subit maintenant une vibration sismique, sont abscisse suit la loi : $x_0(t) = X_0 \cos(\omega t)$. L'ensemble est toujours assimilé à un pendule simple de longueur L_p soumis à la force de frottement précédente. On cherche les solutions de $x_1(t)$ sous la forme $x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi)$.

33. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$ et faisant intervenir $x_0(t)$.

34. En régime sinusoïdal forcé, exprimer X_1 l'amplitude des oscillations de $x_1(t)$ en fonction de X_0 et des données du problème.

35. Montrer qu'on peut obtenir un phénomène de résonance et préciser la condition à vérifier.

Annexes

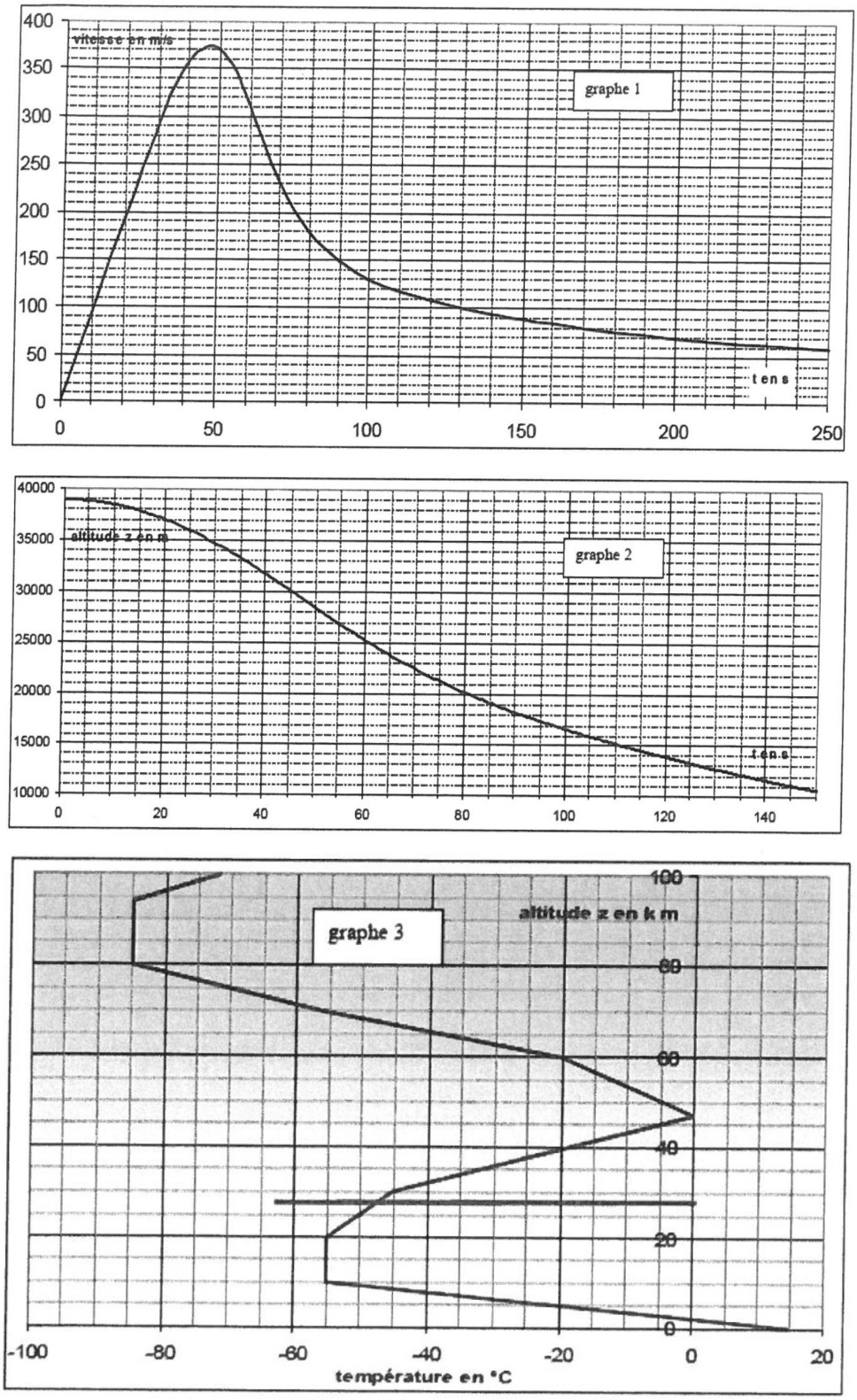

Figure 1 – Graphes

Bon courage et bon travail ! ☺