

DS6 - Mécanique (3 heures)

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront dans une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. Les candidats soigneront leur copie en conséquence. En particulier, les expressions littérales et les résultats des applications numériques seront **encadrés**. On changera de page pour un nouveau problème et on respectera les notations de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sujet à rendre, calculatrice interdite.

Nom :

La partie marquée d'une * est de difficulté plus importante et son barème est adapté.

I Cours

1. Soit la réaction $A + B \rightarrow C$, en supposant que la réaction admette un ordre et en notant m et n les ordres partiels, écrire la loi de vitesse.
2. Donner la configuration électronique de l'or ${}_{79}\text{Au}$. Préciser sa place dans la classification (bloc, période, colonne).
3. Établir la structure de Lewis des ions sulfites SO_3^{2-} .
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par z pour le système masse-ressort vertical.
5. Établir l'équation du mouvement du pendule simple.

II MTS

On considère maintenant une enceinte vide, de volume de constant, thermostatée à la température $T_2 = 1200 \text{ K}$, dans laquelle, à la date $t = 0$, on introduit une quantité n de méthyltrichlorosilan (MTS) de formule brute CH_3SiCl_3 . Pour cette température, la réaction de formation de carbure de silicium peut être considérée comme totale. La figure 2 représente l'évolution de la concentration de MTS dans l'enceinte, pour différentes quantités n introduites, au cours du temps.

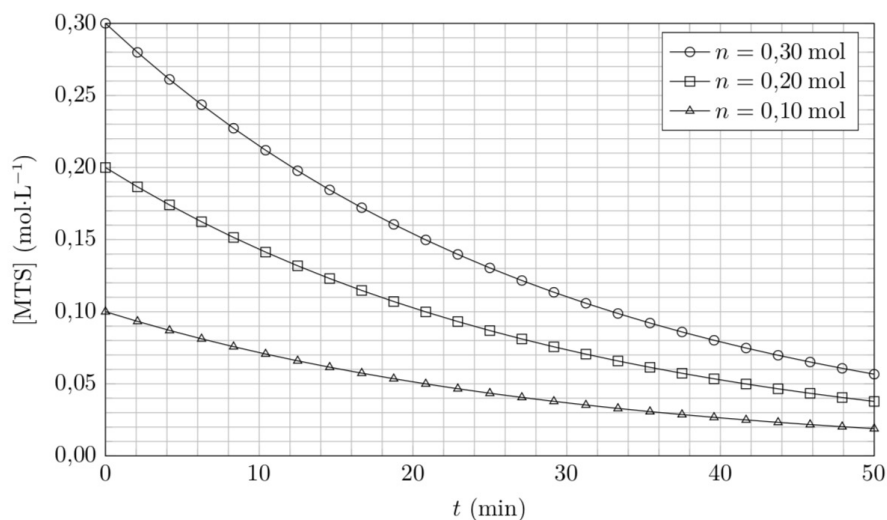


Figure 2 Cinétique de décomposition du MTS

FIGURE 1 – Courbes expérimentales

6. Déterminer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ pour chacune de ces trois expériences. Que peut-on en déduire concernant l'ordre par rapport au MTS ?
7. On notera k la constante de vitesse de la réaction. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la concentration en MTS ?
8. Exprimer la concentration en MTS dans l'enceinte au cours du temps, en fonction de la concentration initiale $[MTS]_0$, du temps et de la constante de vitesse k .
9. Exprimer le temps de trois-quarts de réaction $t_{3/4}$ en fonction de k .
10. Que vaut le rapport :

$$\frac{t_{3/4}}{t_{1/2}}$$

11. Une augmentation de la température de 100 K pour atteindre $T_3 = 1300$ K entraîne une diminution du temps de demi-réaction d'un facteur 20. La constante de vitesse est fonction de la température T selon une loi. Quelle est cette loi ? Déterminer alors la valeur de l'énergie d'activation E_a de la réaction. On donne :

$$\frac{1300 - 1200}{1200 \times 1300} \approx 6.10^{-5}$$

et :

$$8,314 \times \ln(20) \approx 24$$

III Molécule de monoxyde de carbone

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène.

Pour simplifier, on considérera que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox).

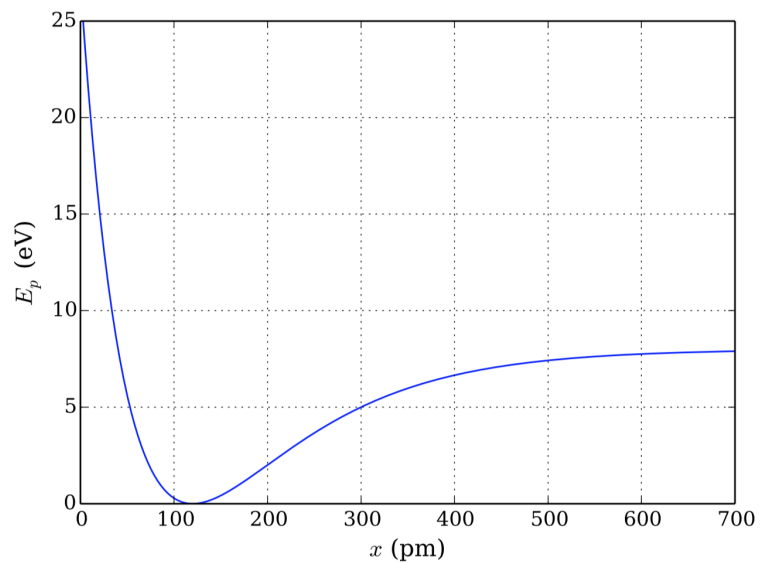
L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$E_p(x) = E_0(1 - e^{-\beta(x-x_0)})^2$$

où x est la distance entre les deux atomes et où E_0 , β et x_0 sont des constantes positives.

On donne le graphe de $E_p(x)$ ci-contre.



12. Quelle est l'unité de β dans le système international ?
13. Définir « position d'équilibre », « position d'équilibre stable » et « position d'équilibre instable ».
14. Déterminer les expressions de E_p en x_0 et l'infini. En déduire, grâce au graphique, les valeurs de x_0 et E_0 . Que représentent physiquement les constantes E_0 et x_0 ?
15. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à E_0 .

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0 . On pose $\varepsilon = \beta(x - x_0)$. On rappelle les développements limités usuels pour $x \ll 1$:

- $e^x \approx 1 + x$
- $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

16. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 (en conservant les termes en ε^2) de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer que l'interaction entre les deux atomes peut-être modélisée par une énergie potentielle élastique dont on précisera l'expression de la constante de raideur k .
17. Établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en utilisant l'énergie mécanique.

18. En déduire la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
Faire l'application numérique en ordre de grandeur avec $\beta = 8,69 \cdot 10^{-3} \text{ pm}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
19. Que se passe-t-il si on communique à la molécule une énergie mécanique supérieure à E_0 ?

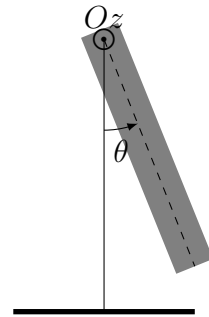
IV Projet Virgo

Les ondes gravitationnelles ont été étudiées grâce à de grands interféromètres. Comme les mesures sont extrêmement fines et faibles en intensité, il est fondamental d'annuler tout le bruit environnant, notamment toute perturbation extérieure telle qu'une légère vibration sismique. Le principe simplifié repose sur l'utilisation d'un oscillateur.

Pendule pesant

On étudie le mouvement d'une barre homogène de masse $m = 100 \text{ g}$ de longueur $\ell = 30 \text{ cm}$ en rotation autour d'une de ses extrémités. Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) s'écrit $J = \frac{1}{3} m \ell^2$.

On repère la position de la barre par l'angle θ entre la verticale descendante et la droite (OG) où O est à l'extrémité de la barre sur l'axe de rotation et G est le centre d'inertie de la barre.



20. Exprimer le moment cinétique du solide par rapport à l'axe (Oz) .
Quelles sont les unités du moment cinétique et du moment d'inertie ? Que quantifie le moment d'inertie ? Que deviendrait-il si on faisait tourner la barre autour d'un axe passant par son centre de gravité ?
21. Exprimer le moment du poids par rapport à l'axe (Oz) .
22. Dans un premier temps, la liaison pivot est supposée parfaite. Que cela signifie-t-il ?
23. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ .
24. Établir l'intégrale première du mouvement et identifier les deux termes avec des énergies que l'on nommera. Que traduit cette équation ?
25. Que devient l'équation du mouvement dans le cadre des petites oscillations ? L'écrire sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 .
26. Résoudre complètement l'équation différentielle avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
27. Représenter l'allure de l'évolution de $\theta(t)$ et l'allure du portrait de phase.

L'action mécanique de la liaison pivot est modélisée par une action mécanique de type « frottement fluide » de moment par rapport à l'axe de rotation $-\lambda \dot{\theta}$ où $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation et $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ uSI}$.

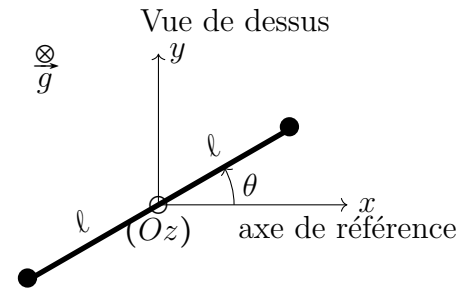
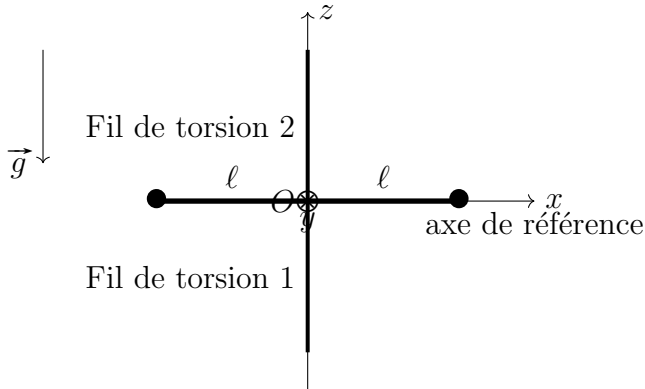
28. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ .
29. Que devient-elle dans le cadre des petites oscillations ?
L'écrire sous forme canonique : $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ et identifier les expressions de ω_0 et Q que l'on nommera.
30. Résoudre complètement l'équation différentielle avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
31. Représenter l'allure de l'évolution de $\theta(t)$ et l'allure du portrait de phase.

Pendule de torsion *

On peut utiliser un pendule de type pendule de torsion. On réalise un pendule de torsion à l'aide de deux fils de torsion, chacun ayant une constante de raideur k . On rappelle que, lorsque le fil est tordu d'un angle θ il exerce par rapport à son axe (ici l'axe vertical (Oz)) un couple de moment $\mathcal{M} = -k\theta$.

Entre ces deux fils de torsion est fixée une tige de longueur $2\ell = 40\text{cm}$ parallèlement au sol du laboratoire (voir figure). Aux deux extrémités de cette tige sont attachées deux masses. On note I le moment d'inertie de l'ensemble {masses + tige} par rapport à l'axe vertical (Oz) .

Vue de face (en l'absence de torsion)



Le système évoluant dans l'air, on supposera que les masses sont chacune soumises à une force de frottements visqueux de la forme $\vec{F}_f = -h\vec{v}$ où h est une constante positive et \vec{v} est la vitesse de la masse. On négligera les frottements s'exerçant sur la tige.

On notera $\Omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation.

32. Faire un bilan précis des actions mécaniques s'exerçant sur le système étudié.
33. Exprimer le moment résultant des deux forces de frottements fluides en fonction de h , ℓ et Ω .
34. Établir l'équation différentielle satisfaite par l'angle $\theta(t)$ et la mettre sous la forme : $\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ en donnant les expressions de τ et de ω_0 en fonction de I , h , ℓ et k .

À l'instant $t = 0$, le système est lâché de sa position de repos ($\theta = 0$) avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$. Les frottements sont suffisamment faibles pour que le régime d'oscillation du pendule de torsion soit pseudo-périodique.

35. Dédire de l'hypothèse précédente une condition sur h .
36. Déterminer alors, dans le cas des petites oscillations, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle, puis tracer l'allure de sa représentation graphique.
37. Que devient l'expression de la pseudo-période T lorsqu'on se trouve en régime de faible amortissement (*i.e.* lorsque $\tau \gg T_0$ où T_0 est la période propre du système).
38. En déduire une expression approchée de la vitesse angulaire $\Omega(t) = \dot{\theta}(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t)$ où l'on précisera les expressions de A et de ω .

Bon courage et bon travail ! ☺