

# DS6C - Mécanique (3 heures)

## Éléments de correction

### I Cours

1. Voir cours et TEST.
2. Voir cours et TEST.
3. Voir cours et TEST.
4. Voir cours et TEST.
5. Voir cours et TEST.

### II MTS

D'après CCP TSI 2016

6. Le temps de demi réaction correspond au temps où la quantité de matière est divisée par 2 par rapport à la quantité de matière initiale.

$n$ (mol)	0,10	0,20	0,30
$t_{1/2}$ (min)	21	21	21

7. L'équation en MTS à l'instant  $t$  vérifie l'équation :

$$-\frac{d[MTS]}{dt} = k[MTS]$$

soit sous forme canonique :  $\frac{d[MTS]}{dt} + k[MTS] = 0$

8. Par séparation des variables et après intégration, on a :

$$\ln\left(\frac{[MTS]}{[MTS]_0}\right) = -kt$$

ou encore :  $[MTS](t) = [MTS]_0 e^{-kt}$

9. Le temps de 3/4 de réaction s'obtient quand :

$$[MTS] = \frac{[MTS]_0}{4}$$

il vient :  $t_{3/4} = \frac{\ln 4}{k} = \frac{2 \ln 2}{k}$

10. Pour l'ordre 1, on a :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

il vient alors :  $\frac{t_{3/4}}{t_{1/2}} = 2$  ce qui est bien vérifié sur les courbes.

11. Il s'agit de la loi d'Arrhénius :

$$k(T) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

À  $T_2$ , on a :

$$k(T_2) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_2}\right)$$

et à  $T_3$ , on a :

$$k(T_3) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_3}\right)$$

or, on a :

$$t_{1/2}(T_3) = \frac{\ln 2}{k(T_3)} = \frac{t_{1/2}(T_2)}{20} = \frac{\ln 2}{20k(T_2)}$$

donc il vient :

$$k(T_3) = 20k(T_2)$$

d'où il vient alors :  $E_a = \frac{R \ln 20}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}} \approx 400 \text{ kJ.mol}^{-1}$

### III Molécule de monoxyde de carbone

12. L'argument de l'exponentielle doit être sans dimension, donc  $\beta$  a la dimension de l'inverse d'une distance.

L'unité de  $E$  et de  $E_0$  n'intervient pas dans la détermination de l'unité de  $\beta$ .

13. On dit que  $x_e$  est une *position d'équilibre* ssi lorsqu'on place  $M$  en cette position  $x_e$  sans vitesse initiale il y reste. L'énergie potentielle y est extrémale. Soit :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} = 0$$

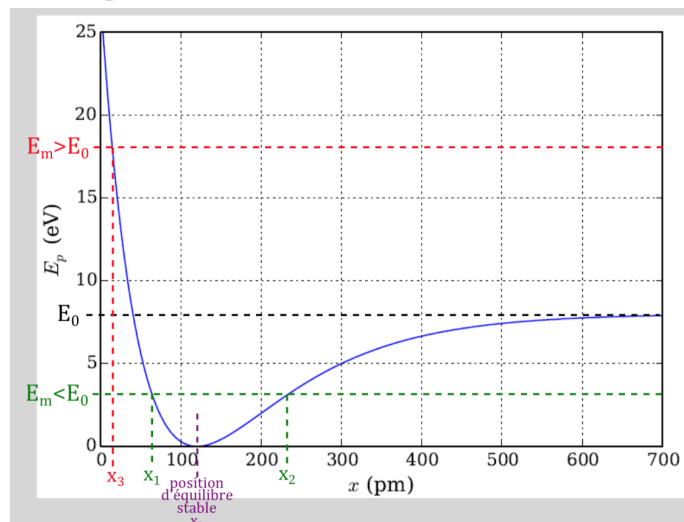
*Équilibre stable* : quand on écarte légèrement un point  $M$  de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à ramener  $M$  vers sa position d'équilibre initiale.

*Équilibre instable* : quand on écarte légèrement un point  $M$  de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à éloigner davantage  $M$  de sa position d'équilibre initiale.

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} E_p(x) = E_0$  et graphiquement, on lit  $E_0 = 8 \text{ eV}$ .

Calculons :  $E_p(x_0) = 0 \text{ eV}$  et graphiquement, on lit  $x_0 = 120 \text{ pm}$ .

$x_0$  correspond au minimum de l'énergie potentielle, donc c'est la position d'équilibre stable pour l'atome d'oxygène par rapport à l'atome d'oxygène.



15. L'énergie mécanique de l'atome d'oxygène est constante puisque l'atome d'oxygène est soumis uniquement à une force conservative dérivant d'une énergie potentielle.

L'énergie mécanique est définie par  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p$ , comme  $E_c > 0$ , les positions accessibles à l'atome d'oxygène sont celles pour lesquelles  $E_p(x) < E_m$ .

Traçons la fonction  $E_m = \text{constante} < E_0$  sur le graphe précédent. Il y a deux intersections avec la courbe  $E_p(x)$  en  $x_1$  et  $x_2$ . Les positions accessibles sont  $x \in [x_1, x_2]$ . L'atome d'oxygène va donc osciller au voisinage de sa position d'équilibre  $x_0$ , entre les deux abscisses  $x_1$  et  $x_2$ .

16. Au voisinage de  $x_0$  :  $E_p(\varepsilon) \approx E_0(1 - (1 - \varepsilon))^2 \approx E_0\varepsilon^2$

Ainsi  $E_p(x) \approx E_0\beta^2(x - x_0)^2$ , qui est donc une énergie potentielle de type « énergie potentielle élastique  $E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}(\ell - \ell_0)^2 \gg$ , de constante de raideur  $\frac{1}{2}k = \beta^2 E_0\beta \Leftrightarrow k = 2\beta^2 E_0$

17. L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, donc nous pouvons écrire que  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , donc

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0, \text{ donc } m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - x_0) = 0, \text{ ainsi on obtient } \ddot{x} + \frac{2\beta^2 E_0}{m}(x - x_0) = 0$$

18. On reconnaît l'équation du mouvement d'un **oscillateur harmonique de pulsation**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta^2 E_0}{m}}$ ,

ainsi la fréquence du mouvement est  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\beta^2 E_0}{m}}$

A.N. :  $E_0 = 8\text{eV} = 12,8 \cdot 10^{-19}\text{J}$ ,  $\beta = 8,69 \cdot 10^{-3}\text{pm}^{-1} = 8,69 \cdot 10^9\text{m}^{-1}$  ;  $m = \frac{M_O}{N_A}$ , ainsi  $f = 1,14 \cdot 10^{13}\text{Hz}$ .  
On attend un résultat de l'ordre de  $10^{13}\text{Hz}$ .

19. Si on communique à la molécule une énergie telle que  $E_m > E_0$ , l'oxygène a suffisamment d'énergie pour atteindre l'infini, par conséquent la liaison covalente entre l'oxygène et le carbone va céder.

Traçons la fonction  $E_m = \text{constante} > E_0$  sur le graphe précédent. Il y a une seule intersection avec la courbe  $E_p(x)$  en  $x_3$ . Les positions accessibles sont  $x \in [x_3, +\infty[$ . L'atome d'oxygène peut s'éloigner à l'infini de l'atome de carbone, l'énergie que possède l'atome d'oxygène permet de rompre la liaison, et l'atome d'oxygène s'éloigne de l'atome de carbone.

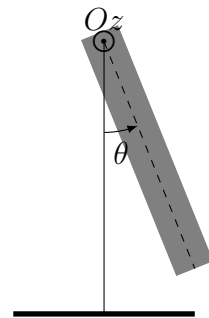
## IV Projet Virgo

Les ondes gravitationnelles ont été étudiées grâce à de grands interféromètres. Comme les mesures sont extrêmement fines et faibles en intensité, il est fondamental d'annuler tout le bruit environnant, notamment toute perturbation extérieure telle qu'une légère vibration sismique. Le principe simplifié repose sur l'utilisation d'un oscillateur.

### Pendule pesant

On étudie le mouvement d'une barre homogène de masse  $m = 100\text{g}$  de longueur  $\ell = 30\text{cm}$  en rotation autour d'une de ses extrémités. Le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  s'écrit  $J = \frac{1}{3}m\ell^2$ .

On repère la position de la barre par l'angle  $\theta$  entre la verticale descendante et la droite  $(OG)$  où  $O$  est à l'extrémité de la barre sur l'axe de rotation et  $G$  est le centre d'inertie de la barre.



20. Le moment cinétique du système par rapport à l'axe  $(Oz)$  s'écrit :  $L_{Oz} = J_{Oz}\omega = \frac{1}{3}m\ell^2 \times \dot{\theta}$

21. Moment du poids par rapport à l'axe  $(Oz)$  :  $\mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) = -mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta)$

**22.** La liaison pivot est supposée parfaite, ce qui signifie que la rotation se fait sans aucun frottement au niveau de la liaison pivot, ainsi  $\mathcal{M}_{Oz}(\text{liaison pivot parfaite}) = 0$

**23.** Afin d'établir l'équation du mouvement vérifiée par  $\theta$ , il faut appliquer la loi du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation  $Oz$  :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_{Oz}(\text{liaison pivot parfaite})$$

$$\text{D'où } J_{Oz} \frac{d\omega}{dt} = -mg \frac{\ell}{2} \sin(\theta) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} = -mg \frac{\ell}{2} \sin(\theta)}$$

**24.** Pour établir l'intégrale première du mouvement, on la multiplie par  $\dot{\theta}$ , puis on en cherche une primitive :  $\frac{1}{3} m \ell^2 \underbrace{\ddot{\theta} \dot{\theta}}_{= \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt}} = -mg \frac{\ell}{2} \times \underbrace{\dot{\theta} \sin(\theta)}_{= -\frac{d \cos(\theta)}{dt}}$

En intégrant, on obtient l'intégrale première du mouvement :

$$\boxed{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m \ell^2 \right) \dot{\theta}^2 - mg \frac{\ell}{2} \cos(\theta) = A}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

On identifie :

— l'énergie cinétique  $E_c(S) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m \ell^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2$

— l'énergie potentielle de pesanteur :  $E_{pp} = -mg \frac{\ell}{2} \cos(\theta) = -m \vec{g} \cdot \vec{OG}$

L'intégrale première du mouvement traduit la conservation de l'énergie mécanique du pendule.

**25.** Dans le cadre des petites oscillations, on peut approximer  $\sin(\theta)$  à  $\theta$ .

Alors l'équation différentielle s'écrit, après quelques simplifications  $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell} \theta = 0$ , qui est celle d'un

oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$ .

**26.** La solution générale s'écrit  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ , avec  $\theta(0) = \theta_0 = A$  et  $\dot{\theta}(0) = 0 = B\omega_0$ .

Ainsi  $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$

**27.** Le portrait de phase est une ellipse d'équation  $\frac{\theta^2}{\theta_0^2} + \frac{\dot{\theta}^2}{(\omega_0 \theta_0)^2} = 1$ , puisqu'il s'agit d'oscillations sinusoïdales (harmoniques).

**28.** Il faut ajouter au bilan des actions mécaniques précédent l'action mécanique de frottement fluide de moment  $\mathcal{M}_{Oz}(ff) = -\lambda \dot{\theta}$

La LMC par rapport à  $(Oz)$  donne alors :  $\boxed{\frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} = -mg \frac{\ell}{2} \sin(\theta) - \lambda \dot{\theta}}$

**29.** Dans le cadre des petites oscillations, l'équation différentielle devient :  $\frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + mg \frac{\ell}{2} \theta = 0$

Sous forme canonique :  $\ddot{\theta} + \frac{3\lambda}{m\ell^2} \dot{\theta} + \frac{3g}{2\ell} \theta = 0$ , que l'on identifie avec  $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ ,

On identifie :

— la pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

— et le facteur de qualité tel que  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3\lambda}{m\ell^2} \Leftrightarrow Q = \frac{m\ell^2}{3\lambda} \times \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$ , soit  $\boxed{Q = \frac{m\ell^2}{\lambda} \sqrt{\frac{g}{6\ell}}}$

**30.** Équation caractéristique :  $x^2 + \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 = 0$

Discriminant :  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right) = 4\omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$

Calculons  $Q = \frac{m\ell^2}{\lambda} \times \sqrt{\frac{g}{6\ell}} = 16,2 > \frac{1}{2}$  : il s'agit d'un régime pseudo-périodique.

$$x = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$$

Ainsi  $\theta(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$

$$\theta(0) = \theta_0 = A$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = -\frac{A}{\tau} + B\Omega, \text{ soit } B = \frac{A}{\tau\Omega}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau} \left( \cos(\Omega t) + \frac{1}{\tau\Omega} \sin(\Omega t) \right)}$$

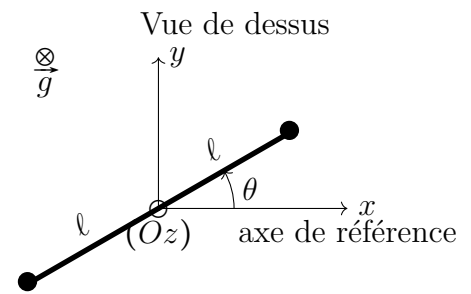
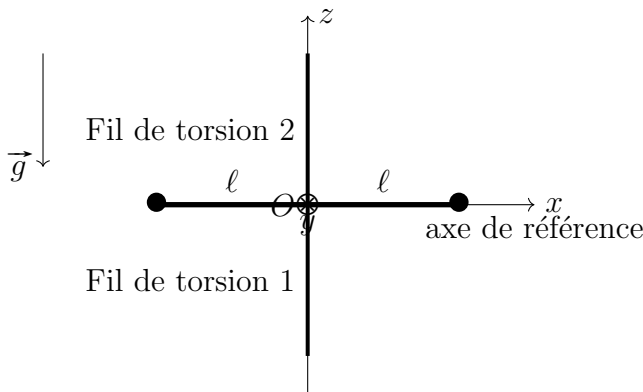
31. Allure et portrait de phase d'un oscillateur amorti.

### Pendule de torsion \*

On peut utiliser un pendule de type pendule de torsion. On réalise un pendule de torsion à l'aide de deux fils de torsion, chacun ayant une constante de raideur  $k$ . On rappelle que, lorsque le fil est tordu d'un angle  $\theta$  il exerce par rapport à son axe (ici l'axe vertical  $(Oz)$ ) un couple de moment  $\mathcal{M} = -k\theta$ .

Entre ces deux fils de torsion est fixée une tige de longueur  $2\ell = 40\text{cm}$  parallèlement au sol du laboratoire (voir figure). Aux deux extrémités de cette tige son attachées deux masses. On note  $I$  le moment d'inertie de l'ensemble {masses + tige} par rapport à l'axe vertical  $(Oz)$ .

Vue de face (en l'absence de torsion)



Le système évoluant dans l'air, on supposera que les masses sont chacune soumises à une force de frottements visqueux de la forme  $\vec{F}_f = -h\vec{v}$  où  $h$  est une constante positive et  $\vec{v}$  est la vitesse de la masse. On négligera les frottements s'exerçant sur la tige.

On notera  $\Omega = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire de rotation.

32. Système : {masses + tige}

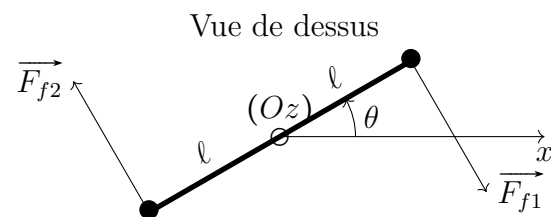
Référentiel : Terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids des deux masses et de la tige ( $m_{\text{tot}}\vec{g}$ ), qui s'exerce au centre d'inertie du système situé au milieu de la tige.
- tension du fil  $\vec{T} = T\vec{u}_z$
- couple de torsion du fil 1 :  $\mathcal{M} = -k\theta$
- couple de torsion du fil 2 :  $\mathcal{M} = -k\theta$
- Actions de frottement fluide sur les deux masses  $\vec{F}_{f1} = -h\vec{v}_1$  et  $\vec{F}_{f2} = -h\vec{v}_2$

Faire un bilan des actions mécaniques précis

- commencer par définir le système étudié précisément. N'est pas assez complet : « le pendule de torsion » ; « la tige » ; « les masses » ;



- le poids  $m\vec{g}$  est le poids d'une masse, or le système est plus complet !
- il y a deux fils de torsion, il y a deux couples de torsion à considérer, qui sont égaux, d'après les indications de l'énoncé qui fournit l'expression du moment ;
- il y a deux masses, chacune soumise à une force de frottement fluide différente. Vu la constitution, ces deux forces sont opposées, il s'agit donc d'un couple, dont le moment est non nul par rapport à l'axe de rotation.

Le schéma est fait pour un mouvement ayant lieu dans le sens direct, à savoir  $\Omega = \dot{\theta} > 0$ . Les vecteurs vitesses des deux masses sont orthoradiaux dirigés dans le sens direct, les forces de frottement fluide sont orthoradiales dirigées dans le sens indirect.

**33.** Moment de  $\vec{F}_{f1}$  s'exerçant sur  $M_1$  :  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{f1}) = -h\ell\Omega \times \ell = -h\ell^2\Omega$ , car :

- la norme de la force  $\|\vec{F}_{f1}\| = h\|\vec{v}_1\| = h\|\ell\Omega\vec{u}_{\theta 1}\| = h\ell\Omega$  (dans le cas  $\Omega > 0$ ).
- le bras de levier, *i.e.* la plus petite distance entre la droite d'action de  $(Oz)$  vaut  $\ell$ , puisque les  $\vec{F}_{f1}$  est orthogonal à l'axe de rotation ;
- elle fait tourner dans le sens indirect.

Moment de  $\vec{F}_{f2}$  s'exerçant sur  $M_2$  :  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{f2}) = -h\ell\Omega \times \ell = -h\ell^2\Omega$ , car le bras de levier vaut  $\ell$  et qu'elle fait tourner dans le sens indirect.

Le moment des résultant des forces de frottement vaut donc  $\boxed{\mathcal{M}_f = -2h\ell^2\Omega}$  (il s'agit d'un couple : la résultante est nulle, mais pas le moment).

**34.** On applique la LMC par rapport à l'axe de rotation  $(Oz)$  :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\text{poids}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) + 2\mathcal{M} + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{f1}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{f2})$$

avec :

- moment cinétique du système :  $L_{Oz} = I\Omega$  ;
- les moments du poids et de la tension du fil par rapport à  $(Oz)$  sont nuls car les deux forces sont colinéaires à l'axe de rotation  $(Oz)$  ;
- moment résultant de torsion :  $\mathcal{M}_t = -2k\theta$

La LMC donne :  $I\ddot{\theta} = -2k\theta - 2h\ell^2\Omega \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2h\ell^2}{I}\dot{\theta} + \frac{2k}{I}\theta = 0}$

Que l'on peut mettre sous la forme :  $\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ , avec  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{I}}}$  et  $\boxed{\tau = \frac{I}{h\ell^2}}$

**35.** Le régime est pseudo-périodique à condition que le discriminant de l'équation caractéristique est négatif :  $\Delta = \frac{4}{\tau^2} - 4\omega_0^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} < \omega_0 \Leftrightarrow \frac{h\ell^2}{I} < \sqrt{\frac{2k}{I}}$

Soit  $\boxed{h < \frac{\sqrt{2kI}}{\ell^2}}$

**36.** Les racines de l'équation caractéristiques sont  $x = -\frac{1}{\tau} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$

Les solutions s'écrivent :  $\theta(t) = e^{-t/\tau}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ , avec  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$

$\theta(0) = 0 = A$  et  $\dot{\theta}(0) = B\omega = \dot{\theta}_0$

Ainsi  $\boxed{\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} e^{-t/\tau} \sin(\omega t)}$

**37.** La pseudo-période est donnée par  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$ . Si  $\tau \gg T_0$ , soit  $\tau \gg \frac{1}{\omega_0}$ , alors  $\boxed{T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}}$

**38.** Dans ce cas-là  $\theta \approx \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t)$

$$\Omega = \dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} e^{-t/\tau} \left( -\frac{1}{\tau} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right) \approx \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} e^{-t/\tau} (+\omega_0 \cos(\omega_0 t)), \text{ car } \frac{1}{\tau} \ll \omega_0$$

Soit  $\boxed{\Omega(t) \approx \dot{\theta}_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t)}$

Bon courage et bon travail ! ☺