TEST08 - Électricité

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Tracer l'allure d'un régime d'amortissement pseudo-périodique libre.

2. Établir l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par l'intensité du courant i dans un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E.

3. Identifier une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q en fonction de R, L et/ou C.

4. Donner la solution homogène d'une équation différentielle d'ordre 2 dont le discriminant de l'équation caractéristique est négatif.

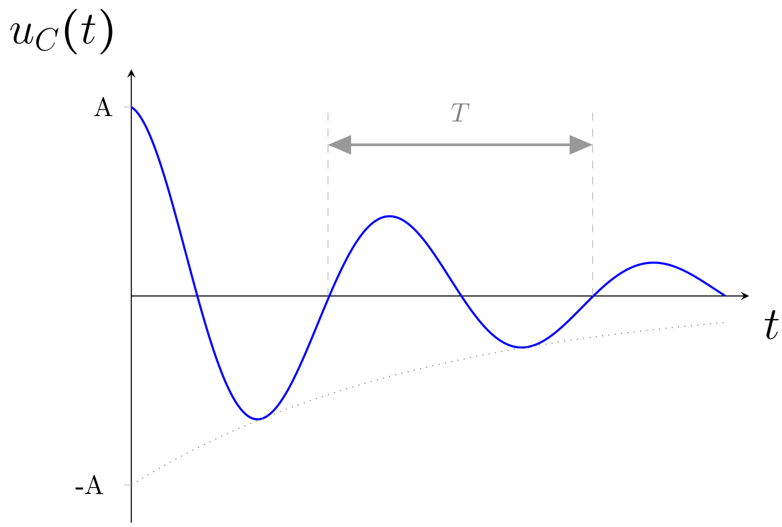
5. Soit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = 12$$

la résoudre et donner $x(t)$ pour $x(0) = 2$ et $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t = 0) = 0$.

Corrigé

1. Voici l'allure. Attention en régime libre veut dire qu'on impose une tension nulle aux bornes du circuit, ainsi en régime permanent (solution particulière), la tension tend vers 0.



2. La loi des mailles nous donne :

$$E = u_R + u_L + u_C$$

il vient :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}$$

que l'on dérive alors par rapport au temps :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

or :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

donc on a :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}i$$

soit finalement sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0$$

3. On a établi :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0$$

on pose :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = 0$$

on identifie rapidement :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et quelques étapes nous amènent à :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

4. Pour l'équation de la forme :

$$\ddot{u_C} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u_C} + \omega_0^2 uC = 0$$

dont le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

si le discriminant est négatif, on est en présence d'un régime pseudo-périodique. La solution homogène est alors de la forme :

$$u_{CH}(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\left(\omega_p t + \varphi\right)$$

avec :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

on rappelle qu'en SII, on la retient sous la forme :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

avec le facteur d'amortissement ξ lié au facteur de qualité Q par :

$$\xi = \frac{1}{2Q}$$

5. La solution est de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_P$$

avec ici $\omega_0 = \sqrt{4} = 2$ et $x_P = 12/4 = 3$. Donc :

$$x(t) = A\cos(2t + \varphi) + 3$$

On calcule la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -2A\sin(2t+\varphi)$$

Puis on applique alors les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) & = 2 = A\cos(\varphi) + 3 \\ \dot{x}(0) & = 0 = -2A\sin(\varphi) \end{cases}$$

On traite la deuxième pour obtenir $\varphi = 0$ et il vient ensuite dans la première $A = -1$. Soit finalement :

$$x(t) = -\cos(2t) + 3$$

que l'on ne demande pas de tracer mais voici l'allure :