TEST09 - Électricité

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Soit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = 12$$

la résoudre et donner $x(t)$ pour $x(0) = 2$ et $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t = 0) = 0$.

2. Établir l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E.

3. Soit une fonction $x(t)$. Écrire la forme canonique générale d'une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $x(t)$ en posant une constante τ et en imposant un second membre nul.

4. Soit une fonction $x(t)$. Écrire la forme canonique générale d'une équation différentielle du second ordre de type oscillateur harmonique vérifiée par $x(t)$ en posant une pulsation propre ω_0 et en imposant un second membre nul.

5. Soit une fonction $x(t)$. Écrire la forme canonique générale d'une équation différentielle du second ordre vérifiée par $x(t)$ en posant une pulsation propre ω_0, un facteur de qualité Q et en imposant un second membre nul.

Corrigé

1. La solution est de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_P$$

avec ici $\omega_0 = \sqrt{4} = 2$ et $x_P = 12/4 = 3$. Donc :

$$x(t) = A\cos(2t + \varphi) + 3$$

On calcule la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -2A\sin(2t + \varphi)$$

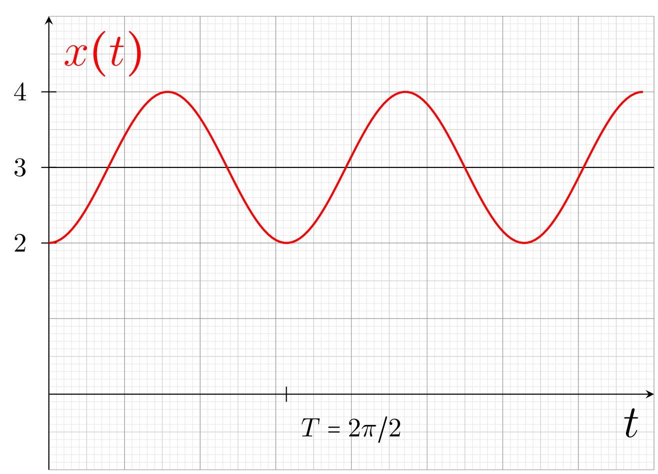
Puis on applique alors les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) & = 2 = A\cos(\varphi) + 3 \\ \dot{x}(0) & = 0 = -2A\sin(\varphi) \end{cases}$$

On traite la deuxième pour obtenir $\varphi = 0$ et il vient ensuite dans la première $A = -1$. Soit finalement :

$$x(t) = -\cos(2t) + 3$$

que l'on ne demande pas de tracer mais voici l'allure :



2. La loi des mailles nous donne :

$$E = u_R + u_L + u_C$$

il vient :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$$

or :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

et :

$$u_C = \frac{q}{C}$$

donc :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

soit alors :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$$

soit finalement sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

3.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x = 0$$

4.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2x = 0$$

5.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2x = 0$$