

TEST20 - Mécanique

⚠ → Encadrer les résultats

1. Établir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dans le cas du ressort horizontal de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k accroché à une masse m .
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par z pour le système masse-ressort vertical.
3. Pour le système masse-ressort vertical, établir l'expression de la position d'équilibre z_{eq} en fonction de ℓ_0 , m , g et k .
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par $Z = z - z_{eq}$ pour le système masse-ressort vertical.
5. Résoudre : $\ddot{x} + 4x = 12$, avec les conditions initiales :

$$x(0) = 1 \text{ et } \dot{x}(0) = 0$$

Corrigé

- 1.** Voir cours. En prenant x la position par rapport au mur on arrive à :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Si on prends $X = x - \ell_0$ l'écart par rapport à la position d'équilibre, on a :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

- 2.** Système : masse, référentiel terrestre supposé galiléen. Le principe fondamental de la dynamique appliquée à la masse nous donne :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

soit avec un axe Oz vertical descendant :

$$m\ddot{z} = mg - k(\ell - \ell_0)$$

avec z la position, soit la longueur du ressort ℓ :

$$m\ddot{z} = mg - k(z - \ell_0)$$

il vient :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$$

d'après la question précédente, on a alors :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{eq}$$

- 3.** À l'équilibre de la masse, on a :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

soit avec un axe Oz vertical descendant :

$$mg - k(\ell - \ell_0) = 0$$

ou encore :

$$mg - k(z - \ell_0) = 0$$

on est à l'équilibre, donc :

$$z = z_{eq}$$

finalement :

$$z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

4. Système : masse, référentiel terrestre supposé galiléen. Le principe fondamental de la dynamique appliquée à la masse nous donne pour z :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{eq}$$

Soit avec le changement de variable (voir cours) :

$$\ddot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

5. On a :

$$x(t) = x_H(t) + x_P$$

on identifie $\omega_0^2 = 4$ soit $\omega_0 = 2$, donc :

$$x(t) = A \cos(2t + \varphi) + x_P$$

La solution particulière x_P est choisie constante, donc $\dot{x}_P = 0$ et $\ddot{x}_P = 0$. Ainsi dans l'équation de départ :

$$0 + 4x_P = 12$$

il vient :

$$x_P = x_{eq} = 3$$

soit alors :

$$x(t) = A \cos(2t + \varphi) + 3$$

On peut calculer la dérivée :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(2t + \varphi)$$

et appliquer les conditions initiales :

$$x(0) = A \cos(\varphi) + 3 = 1$$

$$\dot{x}(0) = -2A \sin(\varphi) = 0$$

on en tire alors d'abord :

$$\varphi = 0$$

puis :

$$A = -2$$

finalemant :

$$x(t) = -2 \cos(2t) + 3$$