TEST21 - Mécanique

⚠ ➔ Encadrer les résultats

---

1. Résoudre : $\ddot{x} + 4x = 12$, avec les conditions initiales :

$$x(0) = 1 \text{ et } \dot{x}(0) = 0$$

2. Tracer l'allure du graphe correspondant.

3. Donner le théorème du moment cinétique pour un point matériel en rotation par rapport à un centre O.

4. Etablir l'équation du mouvement (équation différentielle) vérifiée par l'angle θ pour un pendule simple par application du TMC.

5. Établir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force conservative :

$$\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Corrigé

1. On a :

$$x(t) = x_H(t) + x_P$$

on identifie $\omega_0^2 = 4$ soit $\omega_0 = 2$, donc :

$$x(t) = A\cos(2t + \varphi) + x_P$$

La solution particulière x_P est choisie constante, donc $\dot{x}_P = 0$ et $\ddot{x}_P = 0$. Ainsi dans l'équation de départ :

$$0 + 4x_P = 12$$

il vient :

$$x_P = x_{eq} = 3$$

soit alors :

$$x(t) = A\cos(2t + \varphi) + 3$$

On peut calculer la dérivée :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(2t + \varphi)$$

et appliquer les conditions initiales :

$$x(0) = A\cos(\varphi) + 3 = 1$$

$$\dot{x}(0) = -2A\sin(\varphi) = 0$$

on en tire alors d'abord :

$$\varphi = 0$$

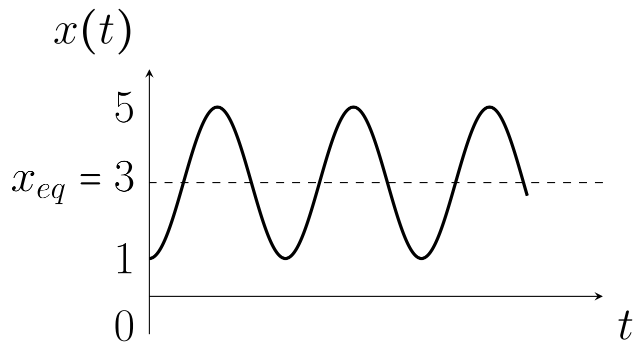
puis :

$$A = -2$$

finalement :

$$x(t) = -2\cos(2t) + 3$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Voici l'allure demandée :



$\boxed{\textbf{3.}}$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F_{ext}})}$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Par le TMC (voir cours) :

$$\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{P}) = -mg\ell \sin\theta \overrightarrow{e_z}$$

on a aussi :

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = m\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

soit alors avec le TMC :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{P})$$

donc en projection sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta$$

finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ La force est conservative, elle dérive donc d'une énergie potentielle. On a :

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$$

(à une dimension si la force dépend de r ce qui est le cas ici). L'énergie potentielle est donc une primitive de cette force :

$$E_p = -\int F.\mathrm{d}r$$

soit :

$$E_p = -\int \left(-\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\right).\mathrm{d}r$$

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r} + cste$$

la constante est prise nulle, en supposant que l'interaction ressentie à l'infini tend vers 0, soit :

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$$