Compte rendu TP14 - Filtres 3

SABER, ELOUAHABI, PFEIFER, PRINTZ

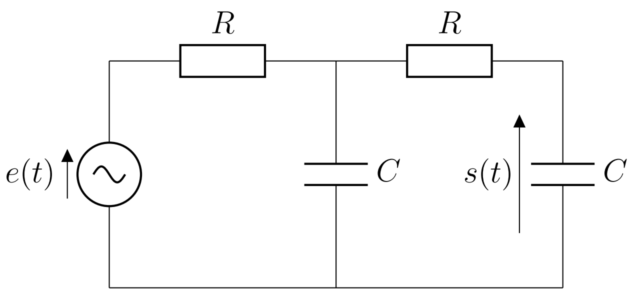
17 décembre 2025

Objectif

Étudier les filtres.

Introduction

Voici le circuit étudié (filtre cascade RC) :

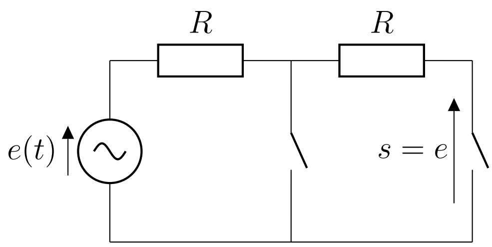


Filtre niveau 1

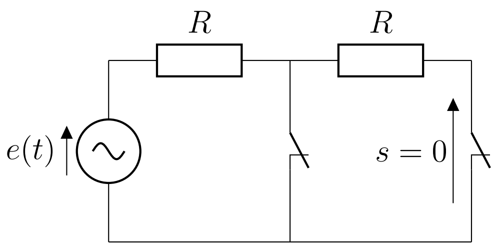
Théorie

Question 1 : Analyse de la nature du filtre

En basse fréquence :



En haute fréquence :



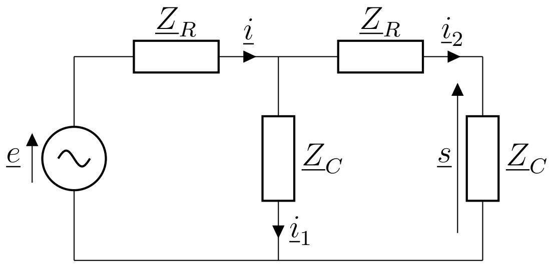
Donc ce circuit est un passe bas d'ordre 2.

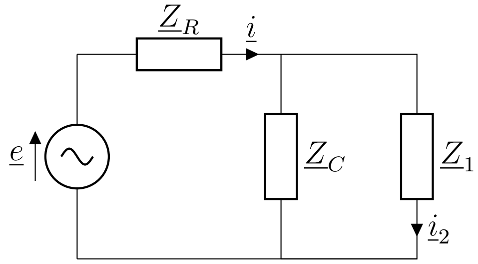
Question 2 : Fonction de transfert

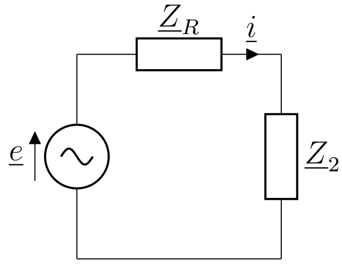
On veut la fonction de transfert. Pour cela, on trace les schémas équivalents avec les étapes de calcul suivantes :

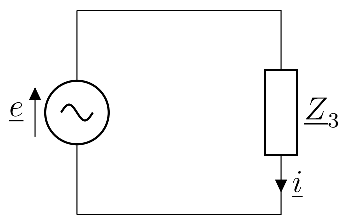
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C, \quad \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{Z}_3 = \underline{Z}_R + \underline{Z}_2$$

Schémas équivalents :









On a les relations :

$$\underline{i}_2 = \left(\frac{\underline{Z}_C}{2\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\right)\underline{i} \quad \text{(diviseur de courant)}$$

$$\underline{e} = \underline{i}\cdot\underline{Z}_3 \quad \text{et} \quad \underline{s} = \underline{i}_2\cdot\underline{Z}_C$$

On obtient :

$$\underline{s} = \underline{Z}_C\left(\frac{\underline{Z}_C}{2\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\right)\left(\frac{\underline{e}}{\underline{Z}_3}\right)$$

D'où la fonction de transfert $\underline{H}$:

$$\begin{aligned}
\underline{H} &= \frac{\underline{Z}_C^2}{\underline{Z}_3(2\underline{Z}_C + \underline{Z}_R)} \\
&= \frac{\underline{Z}_C^2}{(\underline{Z}_R + \underline{Z}_2)(2\underline{Z}_C + \underline{Z}_R)} \\
&= \frac{\underline{Z}_C^2}{\underline{Z}_R(2\underline{Z}_C + \underline{Z}_R) + \underline{Z}_C(\underline{Z}_C + \underline{Z}_R)} \\
&= \frac{\underline{Z}_C^2}{2\underline{Z}_R\underline{Z}_C + \underline{Z}_R^2 + \underline{Z}_C^2 + \underline{Z}_C\underline{Z}_R}
\end{aligned}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par $\underline{Z}_C^2$:

$$
\begin{aligned}
\underline{H} &= \frac{1}{\frac{2\underline{Z}_R\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C^2} + \frac{\underline{Z}_R^2}{\underline{Z}_C^2} + 1 + \frac{\underline{Z}_C\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C^2}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{2\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} + \left(\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C}\right)^2 + \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C}}
\end{aligned}
$$

On remplace maintenant $\underline{Z}_R = R$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$.
Le rapport vaut : $\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega}} = jRC\omega$.

On substitue dans l'expression :

$$
\begin{aligned}
\underline{H} &= \frac{1}{1 + 2(jRC\omega) + (jRC\omega)^2 + jRC\omega} \\
&= \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}
\end{aligned}
$$

Question 3 : Équation différentielle vérifiée par $s(t)$

On part de l'expression fréquentielle pour retrouver l'équation temporelle :

$$
\begin{aligned}
\underline{s} &= \left(1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2\right) \cdot \underline{e} \\
\left[1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2\right] \underline{s} &= \underline{e} \\
\underline{s} + 3RC(j\omega)\underline{s} + (RC)^2(j\omega)^2\underline{s} &= \underline{e} \\
s + 3RC\frac{ds}{dt} + (RC)^2\frac{d^2s}{dt^2} &= e \\
\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3RC}{(RC)^2}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}s &= \frac{e}{(RC)^2} \\
\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}s &= \frac{e}{(RC)^2}
\end{aligned}
$$

Question 4 : Identification de Q et ω_0

Par identification avec notre équation :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}s = \frac{e}{(RC)^2}$$

On obtient pour la pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \implies \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Et pour le facteur de qualité Q:

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC}$$
$$\text{Or, } \omega_0 = \frac{1}{RC}, \text{ donc :}$$
$$\frac{1}{Q \cdot RC} = \frac{3}{RC}$$
$$\frac{1}{Q} = 3 \implies Q = \frac{1}{3}$$

Question 5 : Pulsations et fréquences de coupure

On cherche la pulsation de coupure ω_c. Par définition, pour un filtre passe-bas :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Ici $G_{\max} = 1$. On exprime le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-(RC\omega)^2)^2 + (3RC\omega)^2}}$$

On résout l'équation :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-(RC\omega_c)^2)^2 + (3RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$(1-(RC\omega_c)^2)^2 + 9(RC\omega_c)^2 = 2$$
$$1 - 2(RC\omega_c)^2 + (RC\omega_c)^4 + 9(RC\omega_c)^2 = 2$$
$$(RC\omega_c)^4 + 7(RC\omega_c)^2 + 1 = 2$$
$$(RC)^4\omega_c^4 + 7(RC)^2\omega_c^2 - 1 = 0$$

On pose $X = \omega_c^2$:

$$(RC)^4X^2 + 7(RC)^2X - 1 = 0$$

Calcul du discriminant Δ :

$$\Delta = (7(RC)^2)^2 - 4(RC)^4(-1)$$
$$\Delta = 49(RC)^4 + 4(RC)^4 = 53(RC)^4$$

$\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-7(RC)^2 - \sqrt{53(RC)^4}}{2(RC)^4} = \frac{-7-\sqrt{53}}{2(RC)^2}$$

$$X_2 = \frac{-7(RC)^2 + \sqrt{53(RC)^4}}{2(RC)^4} = \frac{-7+\sqrt{53}}{2(RC)^2}$$

Comme $X = \omega_c^2$ doit être positif, X_1 est impossible ($X_1 < 0$). On garde uniquement la solution X_2.

On en déduit la pulsation de coupure ω_c :

$$\omega_c = \sqrt{X_2} = \sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2(RC)^2}} = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}}$$

Enfin, on exprime la fréquence de coupure $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}\sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}}$$

Question 6 : Exprimer le gain statique H_0 et la bande passante $\Delta\omega$

Donc comme ce filtre est un passe bas $\Delta\omega = \omega_c - 0 = \omega_c$.

On a la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

on a donc le gain statique $H_0 = 1$.

Mesures

Pour la partie mesure, on a regardé la valeur efficace de la tension d'entrée et la valeur efficace de la tension de sortie pour plein de fréquences du GBF différentes. Ce qui nous a donné à la fin le diagramme de Bode suivant :

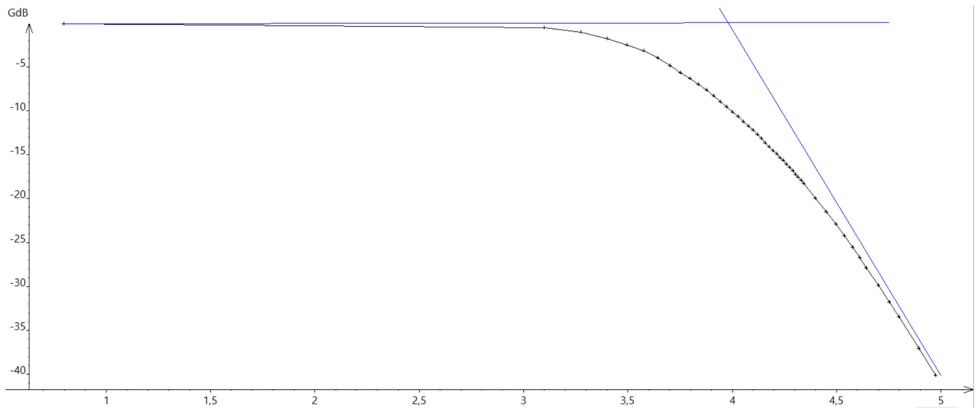


Figure 1: Diagramme de Bode expérimental

Analyse

Question 7 : Tracé des asymptotes et lecture graphique

Après avoir tracé les asymptotes sur le diagramme de Bode, on trouve une fréquence de coupure de $9,425$ kHz par lecture graphique.

C'est un résultat cohérent avec les calculs faits en théorie.

Question 8 : Valeur de G_{dB} à la fréquence de coupure

On cherche la valeur de G_{dB} sur le graphe à la fréquence de coupure.
Pour une fréquence de 9, 425 kHz, on a un $G_{dB} = -9,522$ dB.

Question 9 : Modélisation de la courbe $G_{dB} = f(\omega)$

On veut modéliser la courbe de $G_{dB} = f(\omega)$.
Voici le résultat obtenu :

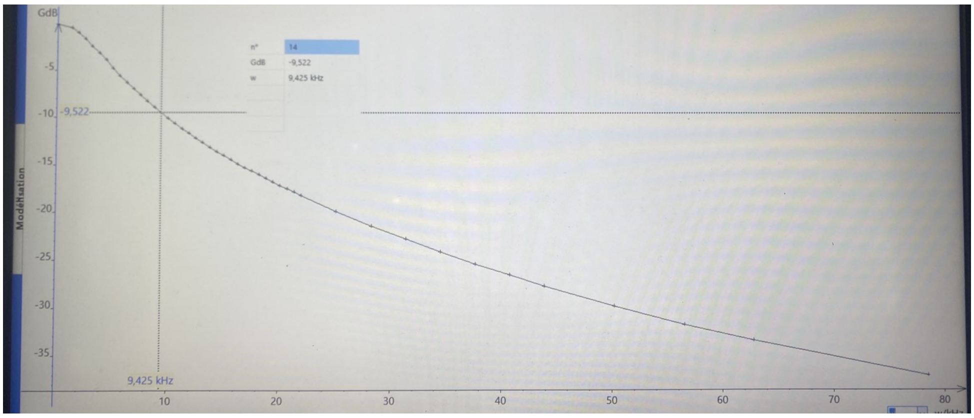


Figure 2: Modélisation de la courbe de gain

Question 10 : Pente dans la zone coupante

On prend deux points sur la droite :

- Point A : $f_1 = 10$ kHz avec $G_1 = -10$ dB
- Point B : $f_2 = 100$ kHz avec $G_2 = -50$ dB

On calcule la pente :

$$\text{Pente} = \frac{G_2 - G_1}{\log(f_2) - \log(f_1)}$$

$$\text{Pente} = \frac{-50 - (-10)}{2 - 1} = \frac{-40}{1} = -40 \text{ dB/décade}$$

Ce résultat de -40 dB/décade confirme bien qu'il s'agit d'un filtre d'ordre 2.