

TP20 : Pendule pesant

Manuel-Menard ; Pehlivanoglu ; Saber ; Monney

17 février 2026

1 Théorie

1. 1. D'après le TMC (Théorème du Moment Cinétique) :

L'équation du mouvement est donnée par :

$$\frac{d\vec{L}_\Delta}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}_{ext}) \quad (1)$$

En projetant sur l'axe de rotation Δ :

$$\frac{d(I_\Delta \cdot \dot{\theta})}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{N}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \quad (2)$$

Et on a :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \quad (3)$$

Donc le moment du poids $\vec{P}$ s'exprime par le produit vectoriel :

$$I_\Delta \ddot{\theta} = [(R\vec{e}_r) \wedge mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)] \cdot \vec{e}_\Delta \quad (4)$$

Ce qui donne l'équation différentielle du mouvement :

$$I_\Delta \ddot{\theta} = -mgR \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{mgR}{J_\Delta} \sin \theta = 0 \quad (5)$$

Par identification avec l'équation caractéristique d'un oscillateur :

$$\omega_0^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{mgR}{J_\Delta}} \quad (6)$$

Expression de la période T :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \iff T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7)$$

D'où :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgR}{J_\Delta}}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mgR}} \quad (8)$$

2. Pour que la période d'oscillations soit la période propre, il faut se placer dans l'approximation des petits angles : $\theta < 20^\circ$

2 Mesures et Analyse

2.1 Expérience 1

Protocole pour pouvoir déterminer la position Xcm du centre de masse CM le plus précisément possible :

On met le cylindre sur le support pour chercher deux trous successifs où le cylindre penche une fois à gauche et l'autre fois à droite. Cela nous indique que la position d'équilibre est comprise dans l'intervalle reliant les deux trous successifs. Puis avec une règle, on regarde, entre les deux points, où l'objet est le plus à même de rester en équilibre (en tatonnant). Chez nous, Xcm était à 14,7 cm de l'extrémité du tube.

2.2 Expérience 2

2.3 Analyse

Après avoir effectué les mesures, on obtient le tableau ci-dessous :

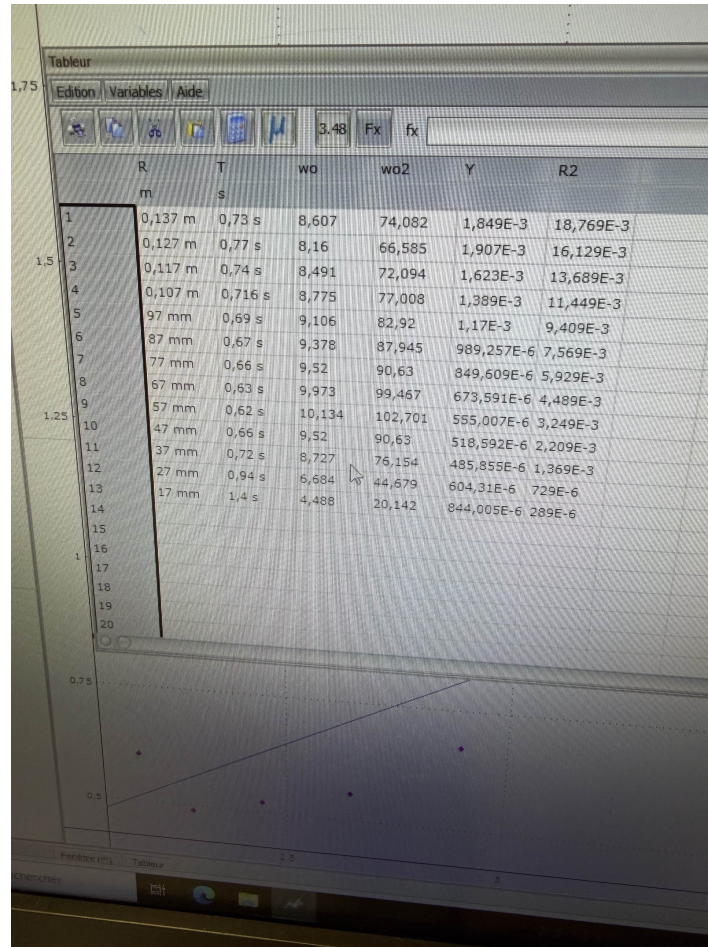


FIGURE 1 – Mesure de periode T pour différentes valeurs de R

3. Comme vu précédemment on a cette expression de la période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{(M+m)gR}} \sqrt{(M+m)R^2 + I_{ca}}$$

L'expression de la période peut se réécrire sous la forme :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{R + \frac{I_{ca}}{(M+m)R}} \quad (9)$$

- Le terme en $1/R$: Pour les petites valeurs de R , ce terme est prédominant. Quand R augmente, ce terme diminue très vite, ce qui explique pourquoi la période T_0 commence par chuter.
- Le terme en R : Pour les grandes valeurs de R , c'est ce terme qui devient prédominant. La période augmente alors proportionnellement à $\sqrt{R}$.

Donc La période T_0 ne varie pas de manière linéaire. Elle possède un minimum pour une certaine valeur de R . Pour les petites valeurs de R , c'est l'augmentation de l'inertie qui domine, tandis que pour de grandes valeurs de R , c'est l'augmentation du couple de rappel qui prend le dessus.

4,5,6. Voici la feuille de calculs pour calculer les pulsations propres et tracer le graphe. Les valeurs sont sur la figure 1 au dessus.

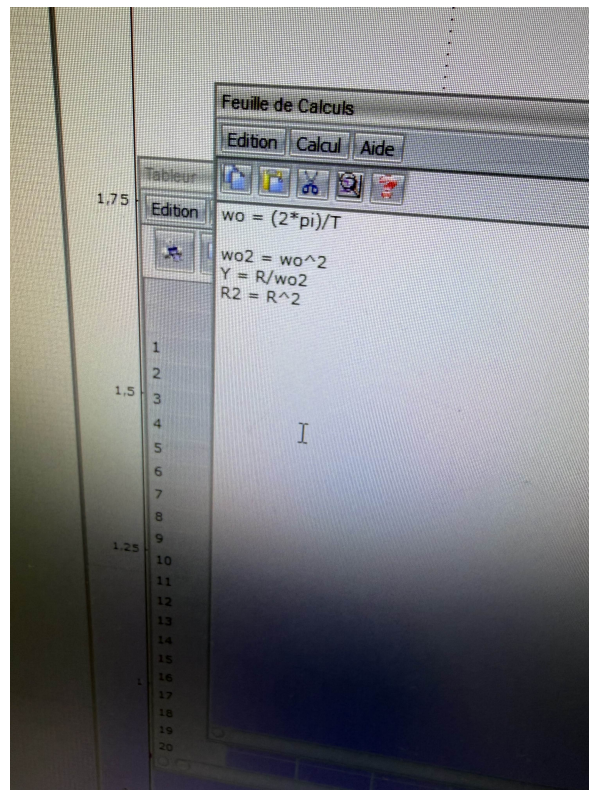


FIGURE 2 – Feuille de calculs

7,8. Ci-dessous le graphe de $Y = f(R^2)$:

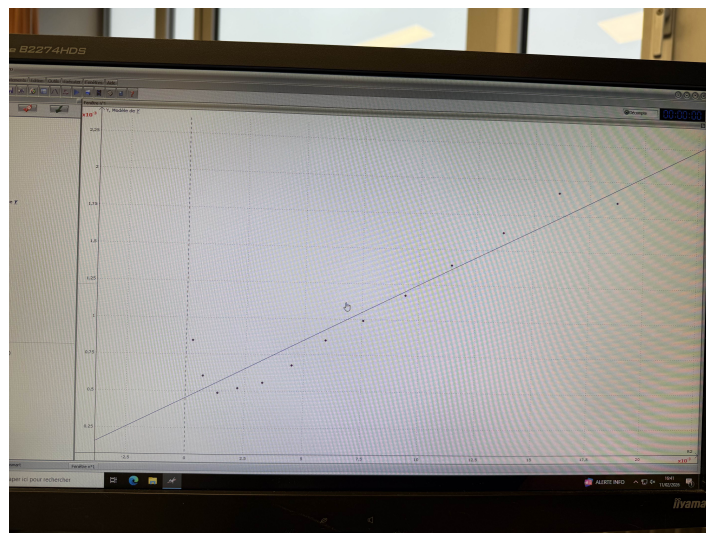


FIGURE 3 – $Y = f(R^2)$

9,10.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{(M+m)gR}} \sqrt{(M+m)R^2 + I_{ca}} \quad \text{et}$$

$$Y = \frac{R}{\omega_0^2}$$

donc

$$\omega_0^2 = \frac{(M+m)gR}{(M+m)R^2 + I_{ca}} \implies Y = \frac{(M+m)R^2 + I_{ca}}{(M+m)g}$$

$$Y = \frac{1}{g}R^2 + \frac{I_{ca}}{g(m+M)}$$

$$y = ax + b \implies a = \frac{1}{g}$$

$$g = \frac{1}{a} = \frac{1}{79 \times 10^{-3}} \approx 12,65$$

Bon, cela reste dans l'ordre de grandeur de l'intensité de pesanteur même si cela n'est pas terrible !

Question 11

Pour une deuxième expérience, on a le modèle affine suivant :

$$y = ax + b$$

avec :

$$a = \frac{1}{g} \quad \text{et} \quad b = \frac{I_{cm}}{g m^2}$$

D'après la régression linéaire :

$$a = 0,106$$

Donc :

$$\frac{1}{g} = 0,106 \implies g = \frac{1}{0,106} \approx 9,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$b = 0,000157$$

Or

$$b = \frac{I_{cm}}{g m^2}$$

Donc

$$0,000157 = \frac{I_{cm}}{g m^2}$$

$$I_{cm} = 0,000157 \times g m^2$$

$$I_{cm} \approx 1,2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$